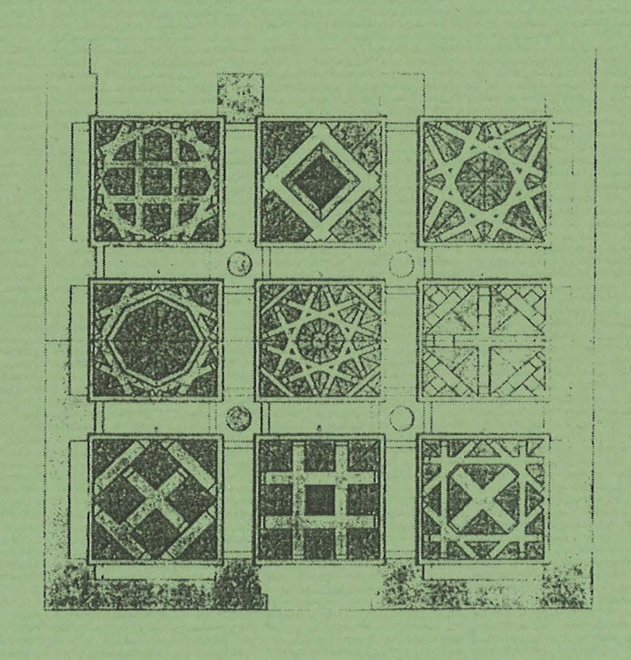
GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (I)

GEOMETRÍA EN LA ARQUITECTURA

por

Mª Agripina Sanz García
Ascensión Moratalla de la Hoz



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (I)

GEOMETRÍA EN LA ARQUITECTURA

por

Mª Agripina Sanz García
Ascensión Moratalla de la Hoz

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Geometría y Arquitectura I.
Geometría en la arquitectura.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 32.02
ISBN: 84-89977-48-8 (obra completa. 2ª edición)
ISBN: 84-89977-47-X (2ª edición)
Depósito Legal: M-41700-1998

Hay un recurso al que acuden todas las ciencias y del que, asimismo, todas se nutren: es la Matemática. La actividad arquitectónica también utiliza este recurso en numerosas ocasiones: cálculo de estructuras, ornamentación, urbanismo...

Pero matematizar una forma, un espacio, un componente constructivo no es sólo dimensionarlo, sino incluirlo dentro de una armonía de proporciones que sintonicen con el ser humano y constituyan un todo.

Así como la Música maneja proporciones y podemos crear sonatas diferentes con los mismos instrumentos y notas, la Arquitectura, matemáticamente realizada, podrá crear aquéllas proporciones que dentro de tramas espaciales organicen la materia armónica y bellamente.

Con esta Serie de Cuadernos "Geometría y Arquitectura" queremos acercar a nuestros alumnos a esta fascinante ciencia que son las Matemáticas a través de algunos temas que creemos que serán de su interés.

1 *Espacio geométrico y arquitectónico.*

El concepto de espacio no es unívoco. Debe abordarse con una gran apertura de ideas. El espacio arquitectónico no puede reducirse ni al espacio físico ni a la dualidad espacio interior-exterior, ni siquiera al concepto de parcelación habitable.

> "El espacio arquitectónico posee un rasgo absolutamente diferencial: es creado por el hombre para el uso del hombre"[1].

Por otro lado, la Geometría elabora modelos matemáticos capaces de describir parcelas concretas del espacio. Cabe considerar así el espacio geométrico, como una aportación teórica, sugerente y clara al estudio de ciertas facetas formales del espacio arquitectónico.

La realización de un proyecto arquitectónico introduce en el ambiente una alteración, una alteración espacial. Volúmenes, superficies, líneas y sus articulaciones plásticas y cromáticas concurren juntas al crear, tanto en el interior como en el exterior del edificio, espacios cuya calidad dependerá también de la relación dimensional con el hombre. El espacio es siempre, en alguna medida, dinámico, precisamente porque es visible y disfrutable desde diferentes puntos de vista, y porque nunca es posible hablar de un solo espacio: por lo menos son dos, el exterior y el interior; pero habitualmente son muchos más, porque hasta un edificio sencillo presenta numerosas articulaciones. En el exterior, Kahn defiende que se debe buscar la capacidad evocativa que las formas geométricas puras poseen intrínsecamente. El significado debe dejarse implícito, latente, con voluntad de permanecer y nunca quedar del todo explicado. En este sentido es heredero de Wright y de su predilección por las formas y volúmenes elementales.

Para entrar en la definición del concepto de espacio arquitectónico, expondremos la definición de Nikolaus Pevsner :

> "Un cobertizo para guardar bicicletas es un edificio. La catedral de Lincoln es una obra de arquitectura. Todas o casi todas las estructuras que delimitan un espacio de medida suficiente para que se mueva un ser humano, son un edificio... Un edificio puede provocar sensaciones estéticas de tres maneras: La primera de estas maneras es en dos dimensiones; es la manera propia del

Samarrá, alminar en espiral. Siglo IX

[1] Alsina-Trillas: *Lecciones de Algebra y Geometría,* Barcelona, 1984

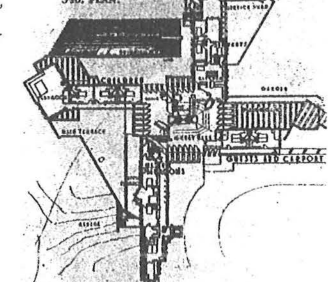
pintor. Son sensaciones producidas por el tratamiento de la superficie, por las proporciones, por las relaciones de los vacíos con los llenos y por la ornamentación. La segunda, en tres dimensiones, trata el edificio como un volumen, es la manera del escultor. Es estéticamente significativo el tratamiento exterior de un edificio en su conjunto, sus contrastes, los efectos. La tercera manera también es en tres dimensiones, pero se refiere al espacio; más que las anteriores es propia del arquitecto. Las sensaciones estéticas se provocan por el efecto en nuestros sentidos del tratamiento del interior, la sucesión de los ambientes, el ensanchamiento de una nave en el crucero, el movimiento majestuoso de una escalinata barroca. Lo que distingue la arquitectura de la pintura y de la escultura es su característica espacialidad. En este campo, y sólo en este campo, ningún otro artista puede emular al arquitecto. Por tanto, la historia de la Arquitectura es, ante todo, la historia del hombre que modela el espacio"[2].

La definición la recoge también Bruno Zevi:

"... la pintura actúa en dos dimensiones, aunque pueda sugerir tres o cuatro. La escultura actúa en tres dimensiones, pero el hombre se queda en el exterior, separado. En cambio la arquitectura es como una gran escultura excavada en cuyo interior el hombre penetra y camina"[3].

Volviendo al proceso proyectual de un edificio, para formular su esquema, el arquitecto deberá emplear un medio de representación preciso y fiable. Este medio se lo proporciona la GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, y sobre todo, la GEOMETRÍA EUCLIDEA, que es la geometría base del arquitecto al tratar la economía del espacio, aunque también puede recibir ayuda de otra geometría, la GEOMETRÍA PROYECTIVA, que es la base matemática de la descriptiva.

Observemos estas obras arquitectónicas de Wright. En ellas usa una doble geometría: la de un ángulo recto principal y la de otro girado 30° y 60^orespecto al primero en la Casa Johnson de Racine (1937),

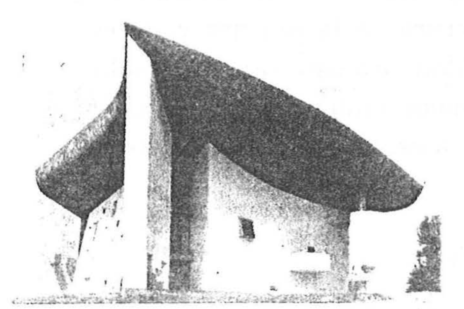


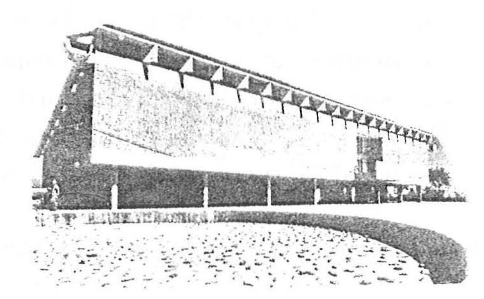
[2] *Storia dell'architettura europea*, Bari, Laterza, 1963

[3] *Saper Vedere L'architettura*, Torino, Einaudi, 1949

y las geometrías del rectángulo y del círculo en la Casa Jester de Palos Verdes (1938).

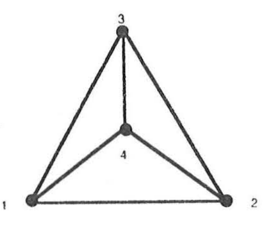
La arquitectura no puede expresarse ni comunicarse más que con medios gráficos y éstos tienen gran importancia porque, convenientemente elegidos y usados con maestría, pueden efectivamente representar y simular la deseada realidad proyectual. Es muy difícil, por ejemplo, proponer soluciones si no se conoce la geometría de una estructura, por ejemplo. Para el técnico, la forma es una ecuación matemática; para el arquitecto es además proporción, espacio y armonía.





La Chapelle de Ronchamps (1952) y el Museo de Chandigahr.Le Corbusier.

2 *Sobre el concepto de Geometría.*



GEOMETRIA DE LOS CUATRO PUNTOS

-Existen exactamente cuatro puntos.

-Dos puntos distintos están en una línea.

-Cada línea está en dos puntos.

TEOREMA: HAY EXACTAMENTE SEIS LÍNEAS EN ESTA GEOMETRÍA

La Geometría siempre ha partido de la observación de la realidad. Diferentes realidades han motivado diferentes modelizaciones geométricas. Felix Klein[4], en 1872 sentó las bases de una definición unificadora de la Geometría. Para Klein, en una geometría existen dos bases fundamentales: un espacio E y un grupo $G(E)$ de transformaciones de ese espacio. E puede ser un *conjunto finito de elementos*, puede ser $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,... El grupo $G(E)$ está contenido en el grupo de biyecciones de E en E.

A partir de este par, se clasifican las figuras en *equivalentes* si y sólo si existe una tranformación de $G(E)$ que transforme una en otra. Como sobre un mismo espacio se pueden considerar distintos grupos de transformaciones, existen tantas geometrías como posibles subgrupos del grupo de biyecciones del espacio en sí mismo. La distinción entre una y otra geometría se basa en el conjunto de invariantes de cada una de ellas. Por tanto, cada geometría se caracteriza por un grupo de transformaciones y por sus invariantes.

[4] *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, conocido como el Programa de Erlangen.*

El tratamiento de la Geometría como una ciencia pura no llegaría hasta 1899, año en el que Hilbert publicó "Fundamentos de la Geometría". En esta obra el espacio es considerado como un concepto matemático y sólo matemático y no como lugar, forma y estructura de nuestra experiencia.

GEOMETRÍAS CLÁSICAS

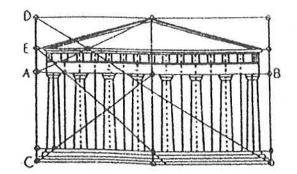
GEOMETRÍA	GRUPO DE TRANSFORMACIONES	INVARIANTES
Euclídea	Isometrías { Traslaciones Rotaciones Simetrías	Distancias Angulos Paralelismo Razones dobles
Equiforme	Semejanzas { Isometrías Homotecias	Angulos Paralelismo Razones dobles
Afín	Afinidades	Paralelismo Razones dobles
Proyectiva	Proyectividades	Razones dobles

La Geometría ha evolucionado a lo largo de la historia de una manera gradual a base de resultados que provenían de distintas direcciones. La Matemática, entendida como disciplina racional bien organizada no existía antes de la época clásica griega (600 a 300 años antes de Cristo). Las aplicaciones de la Matemática en las civilizaciones primitivas se limita a cálculos comerciales muy sencillos, al cálculo aproximado de áreas de campos, a la decoración geométrica de la cerámica, al diseño de dibujos para reproducirlos repetidamente en los tejidos, y al registro y medida del tiempo.

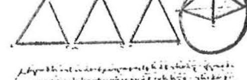


Diseños geométricos en culturas primitivas

En las civilizaciones babilónica (3000 a.C.) y egipcia (4000 a.C.) el papel de la Geometría fue insignificante. Conocen y utilizan algunas fórmulas empíricas, pero no existe ningún pensamiento consciente sobre abstracciones, ni ninguna idea de demostración. No hubo, de hecho, ninguna concepción de ciencia teórica: sólo unas reglas simples y desconexas que respondían a problemas de la vida diaria.



Armonía, proporción


Elementos de Euclides

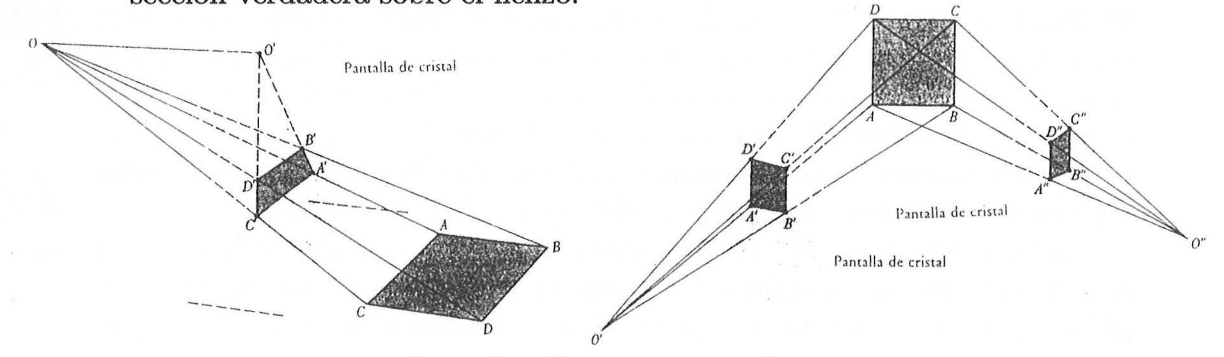

Perspectiva: instrumentos de Durero y Alberti

Sin embargo, la matemática griega alcanzó gran brillantez. En Grecia la preeminencia es de lo estático y permanente frente a lo mudable y móvil. Observamos unidad, orden, armonía, proporción y simetría tanto en la expresión artística como en la *Geometría Euclídea.* A Euclides se debe el tratamiento axiomático de la Geometría: estableció el sistema de axiomas, la ordenación de los teoremas y el proceso de las demostraciones. Una vez elegidos los términos que no se pueden definir de forma lineal (punto, línea, línea recta...), se enuncian los *postulados* (axiomas), proposiciones que se asume que son verdaderas, no se demuestran, y cumplen las condiciones de independencia, consistencia y completitud.

El afán por comprobar la independencia del V Axioma de los cinco postulados de la Geometría Euclídea (Por un punto exterior a una recta dada sólo podemos trazar una paralela a ella), será el motor para la aparición de las *Geometrías no euclídeas.*

Aunque los hombres del Renacimiento, sólo percibieron ligeramente los valores de las obras griegas, dieron algunos pasos originales en geometría que prepararon el camino a su extraordinario desarrollo en el siglo XVII. En la época renacentista, la descripción del mundo real se convirtió en el objetivo de la pintura. Gracias a las inquietudes de los pintores renacentistas, que se enfrentan al problema de representar el mundo real tridimensional en un lienzo plano, aparece la perspectiva.

Alberti, en el siglo XV, propuso pintar lo que se ve con un solo ojo. Su plan era obtener la ilusión de la profundidad mediante luces y sombras. Para ello, ideó un método que interponía una pantalla de vidrio vertical entre el pintor y la escena. Las líneas de luz entre el ojo y cada punto de la escena, llamadas 'proyección', formaban en la pantalla unos puntos llamados 'sección'. El problema por tanto de pintar de forma realista es obtener una sección verdadera sobre el lienzo.

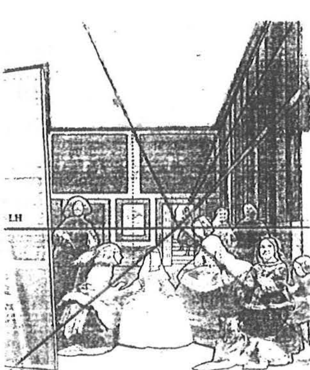


Pero si el ojo mira desde dos posiciones distintas, ¿qué relación matemática existirá entre las secciones correspondientes a la misma figura?

No es de extrañar que aparezca una nueva geometría concordante con estos hechos. En ella, ya no habrá distinción esencial entre rectas paralelas

o secantes: todas se cortan, bien en un punto ordinario o en un punto del infinito.

En esta geometría, la noción de distancia, y por tanto las propiedades métricas, queda naturalmente desvanecida y sólo se atiende a problemas de alineación y de intersección. Eran los comienzos de una nueva rama de la Geometría, conocida a partir del siglo XIX como *Geometría Proyectiva.* Aunque Desargues le da vida en la primera mitad del siglo XVII, será Poncelet el encargado de reinventar esta geometría con plena conciencia de su finalidad: estudiar las propiedades globales de las figuras. Desargues se anticipó a su tiempo, diseñó una geometría sin círculos, distancias, ángulos, mediatrices ni paralelismos. Pero por encima de estos teoremas concretos de Desargues y Pascal, estaban surgiendo nuevos principios, los de cambio continuo en una figura geométrica y de invariancia por una transformación.



Las Meninas. Velázquez (1656)

En los siglos XVI y XVII el álgebra se expandió enormemente y se impuso sobre el pensamiento geométrico. Para justificar los razonamientos algebraicos se apoyaban en el significado geométrico equivalente.

Esta dependencia del álgebra respecto a la geometría empezó a invertirse cuando Vieta, y más tarde Fermat y Descartes emplearon el álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas. Construyeron la *Geometría analítica* que revolucionó las matemáticas.

> "He decidido abandonar la geometría abstracta para estudiar otro tipo de Geometría que tiene por objeto la explicación de los fenómenos de la naturaleza" (René Descartes).

Geometría de coordenadas

La idea central de esta geometría, llamada también Geometría de coordenadas, es asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. Newton en 1707 dice:

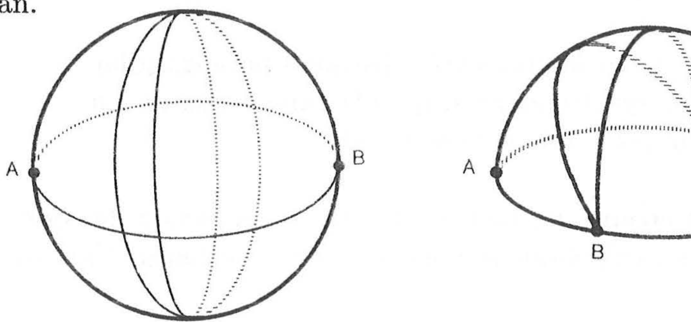
> "Los modernos geómetras admiten en la Geometría todas las líneas que pueden expresarse por ecuaciones".

Monge, en el siglo XVIII, recupera el estilo de la Geometría sintética empujado por problemas de construcción, elaboración de planos...El estudio de diversos sistemas de representación desembocó en la creación de la *Geometría Descriptiva* (1799). Esta Geometría muestra cómo proyectar ortogonalmente un objeto tridimensional en dos planos, uno horizontal y otro vertical. Por otra parte, siguiendo las normas de aplicación del Álgebra y del Cálculo a cuestiones geométricas nace la *Geometría Diferencial.*

Aproximadamente hasta 1800, se veía en la Geometría Euclídea la idealización correcta de las propiedades del espacio físico. A pesar de la confianza

total en ella los matemáticos durante todo ese tiempo no dejaron de investigar y preguntarse por el axioma de las paralelas. Aunque nadie dudaba de su veracidad, en la forma establecida por Euclides era demasiado complicado. Hubo dos líneas de investigación: reemplazarlo por un argumento más autoevidente o tratar de deducirlo de los otros axiomas. Pero los axiomas sustitutos que se encontraron tras grandes esfuerzos - el mismo Legendre dedicó veinte años a lograrlo - no eran más satisfactorios. En 1763, Klügel observó sagazmente que la certeza del axioma estaba apoyada en la experiencia, por encima de la autoevidencia. Se dieron cuenta de que cualquier conjunto de hipótesis que no conducía a contradicciones ofrecía una Geometría posible. Se convencieron de que el axioma de las paralelas no podía ser demostrado, esto es, es independiente de los otros axiomas de Euclides: se podían concebir otras geometrías lógicamente consistentes, no euclídeas. Gauss, Lobatchevsky y Bolyai después de siglos de trabajo de matemáticos anteriores, elaboraron la *Geometría no euclídea*, si bien la cuestión de su consistencia permaneció como problema abierto durante otros cuarenta años. Las dos negaciones posibles del Axioma de las paralelas conducen a las Geometrías no Euclídeas *Hiperbólica y Elíptica :*

Axioma de la Geometría Elíptica.- Dos rectas cualesquiera siempre se cortan.



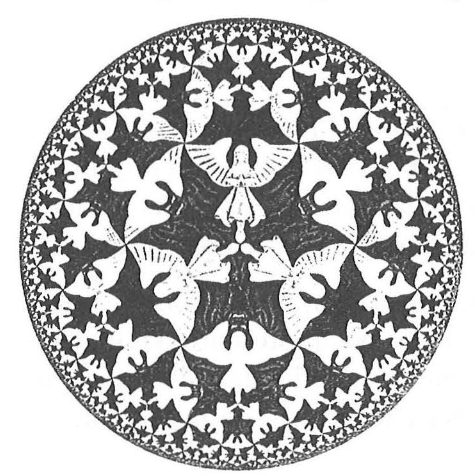
El modelo de la Geometría elíptica doble se construye sobre una esfera, interpretando la recta como un círculo máximo sobre la superficie esférica. El de la Geometría elíptica simple sobre una semiesfera.

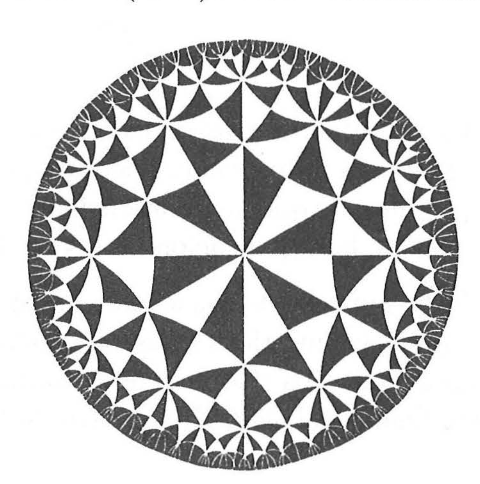
Axioma de la Geometría Hiperbólica.- Desde un punto exterior a una recta pueden trazarse al menos dos paralelas a la recta dada.

Modelo de Poincaré

Como ejemplo de Geometría no euclídea citamos el modelo de *Geometría Hiperbólica de Poincaré* donde el universo de puntos está constituido por el interior de un círculo. Las rectas son arcos circulares perpendiculares en sus extremos a dicha circunferencia. En este universo las propiedades de las rectas difieren de las propiedades euclídeas: existen infinitas rectas que pasan por un punto y no cortan a una recta dada.

Los dibujos de las siguientes figuras de Escher (1960) ilustran este modelo:





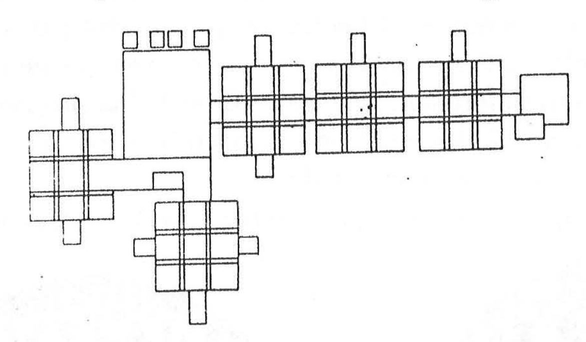
Y actualmente, ¿cómo se manifiestan las tendencias de la Geometría?. Observamos la invasión creciente de la geometría por las técnicas: analíticas, topológicas, algebraicas, informáticas,...Esto ha llevado a campos de una elevada abstracción. Sin volver a la Geometría Euclídea, se piensa en una geometría actual que preste más atención a las ideas que engendra que a los métodos que las desarrollan. Se lamenta la pérdida de la visión y del goce de las configuraciones geométricas. Lo expresa Guggenheimer:

> "He encontrado la fuerza esencial de la geometría y temo que nuestros jóvenes hayan sido privados demasiado tiempo de este placer"

¿Volveremos a una geometría *figurativa*?. ¿Apuntará en esa dirección la *Geometría Fractal*?. ¿Se podrá encontrar orden y regularidad en formas geométricas aparentemente caóticas?. ¿Podremos construir una geometría para las formas irregulares?.

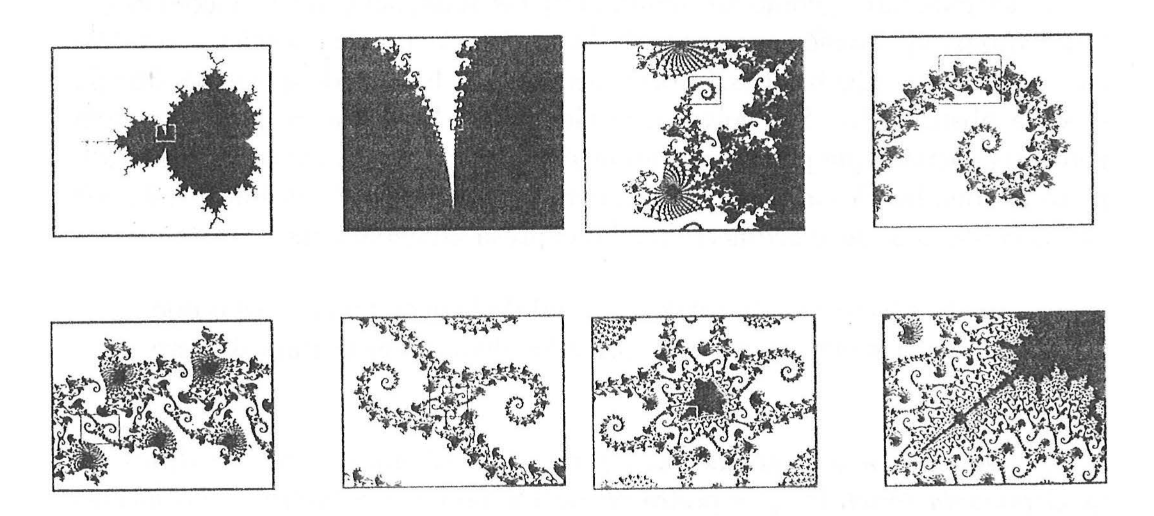
La matemática, una vez más, no se deja asustar por el reto y nace la Geometría Fractal, abriendo paso incluso a una *arquitectura fractal.*

Louis Kahn interpreta la idea de fractal en alguna de sus obras.



La voluntad de trascendencia y permanencia que expresa su arquitectura va ligada a la influencia del pensamiento de Platón, y es expresión de su convencimiento de que la recuperación de la dignidad humana se puede producir a través de la dignificación de la arquitectura de las instituciones humanas.

El término fractal ha sido acuñado recientemente por Mandelbrot y designa objetos geométricos de estructura irregular que están presentes en muchos comportamientos y formas de la naturaleza, aunque ya habían sido tratados desde finales del siglo XIX dentro de la Teoría Geométrica de la Medida.



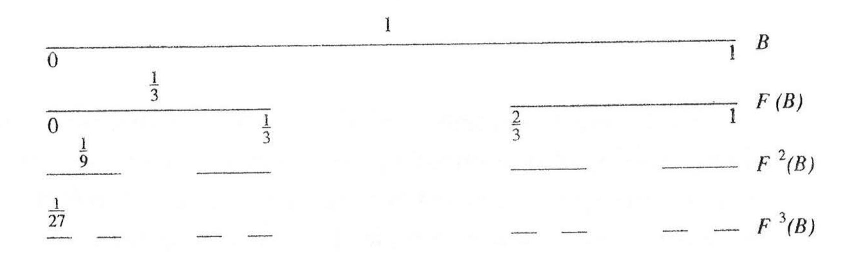
Profundizando en la frontera del conjunto de Mandelbrot se observa la gran belleza visual de este conjunto.

Los fractales son objetos matemáticos encuadrados en el campo de la teoría geométrica de la medida, si bien su delimitación exacta aún está por establecer. La mejor forma de describirlos consiste en señalar lo que tienen en común los procesos matemáticos que los generan.

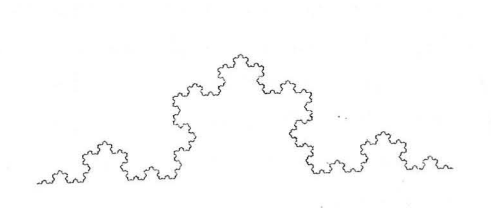
Sus rasgos característicos son la simplicidad de su construcción y la aparente complejidad del producto final.

El fractal típico con el que surgieron las especulaciones en este campo es *el conjunto de Cantor.*

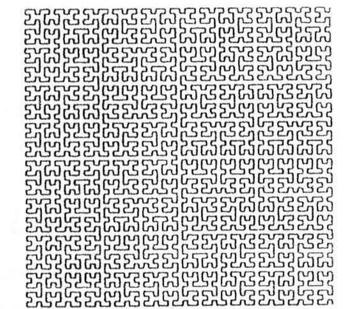
Para construirlo se toma un segmento. Se divide en tres partes iguales. Se elimina el segmento central. Con cada uno de los dos restantes se procede del mismo modo... y así infinitas veces. Lo que queda es el conjunto de Cantor.



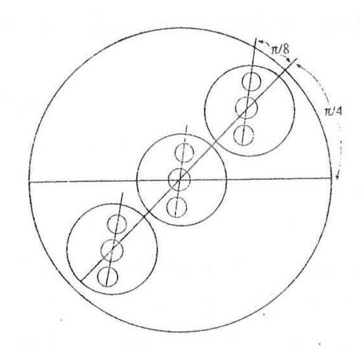
Como hemos visto, para describirlo y construirlo se requiere muy poca información. Lo característico de las estructuras fractales es la iteración infinita de este simple proceso. Otros ejemplos de fractales del tipo de Cantor son la curva de Koch, la curva de Hilbert y el conjunto de Martín-Mattila:



Curva de Koch



Curva de Hilbert

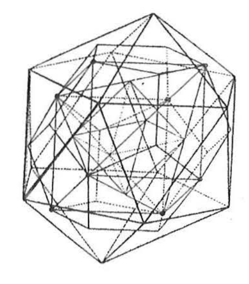


Conjunto de Martín-Mattila,1988

3 *La geometría de la arquitectura*

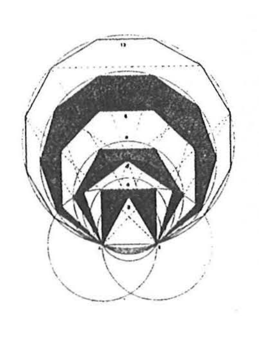
Para proyectar se necesita poseer un método gráfico de proyección: la geometría. Una geometría del diseño arquitectónico, en la que la palabra 'diseño' reviste el doble significado de invención-proyectación y de operación gráfica para la construcción de la propia invención.

La geometría es pues el instrumento con el que delimitamos, cortamos, precisamos y formamos el espacio. En palabras de Giancarlo De Carlo:



Los cinco cuerpos platónicos.

> "La forma tridimensional de la arquitectura no es el exterior de un sólido, sino la envoltura cóncava y convexa de un espacio; y a su vez el espacio no es el vacío sino el lugar volumétrico en el que se desenvuelve toda una serie de actividades posibles y variadas. En consecuencia, en el caso de la arquitectura, la "invención" se refiere a un "sistema espacial organizado" que experimentamos a través de su utilización y que percibimos a través de su forma".[5]



Generación de los siete polígonos básicos

Al ser la reconocibilidad de las formas una condición indispensable para que el mensaje arquitectónico sea recibido, las formas serán pues tanto más perceptibles y reconocibles cuanto más sencillas y regulares sean. Es más, los caracteres formales específicos, intrínsecos, de las figuras geométricas son tan fuertes que generan en el hombre, cualquiera que sea su grado de evolución, inmediatas e instintivas referencias simbólicas.

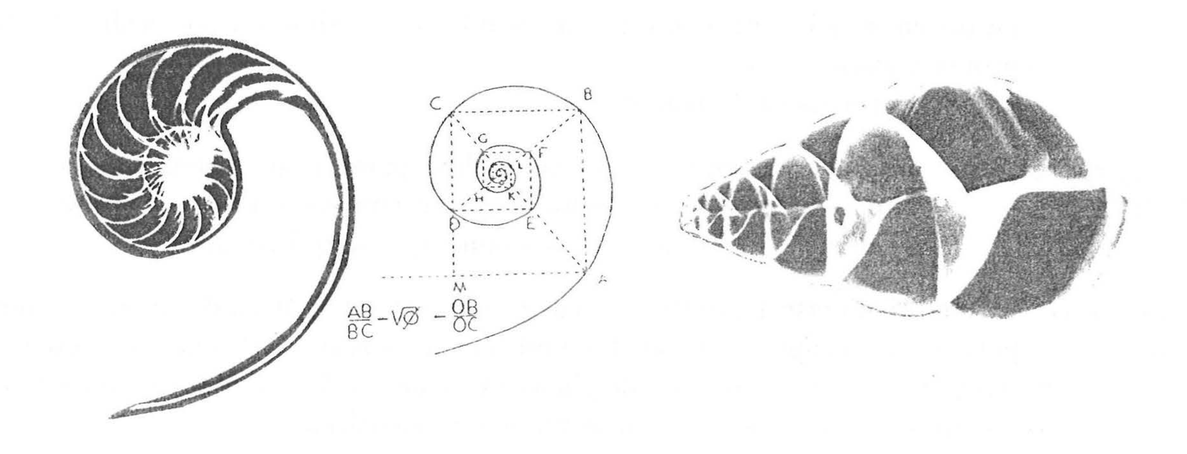
Según el Diccionario Oxford la geometría es la ciencia de las propiedades y relaciones de magnitudes en el espacio.

Para el arquitecto es una base y un medio disciplinar, un instrumento indispensable en el tratamiento de las formas que entran en la "composición" de los espacios.

La geometría es una construcción del cerebro humano, si bien la observación de la naturaleza nos llevaría a considerarla como un conjunto de leyes que están fuera del hombre. Al observar los procesos de formación de los minerales y el crecimiento de los vegetales y de los animales, la racionalidad humana, ha sido capaz de "reconocer" ciertas formas sencillas, hallando relaciones particulares entre ellas y en el interior de ellas, es decir, construyendo los sistemas de lógica matemática que se llaman geometrías.

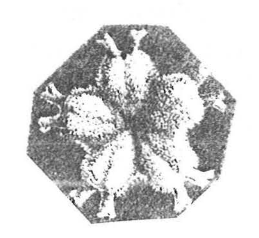
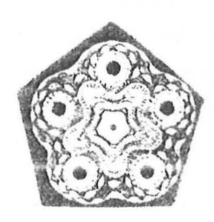
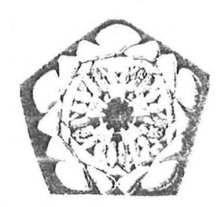
[5] *L'idea plastica come sfida alla tecnologia, 1975*

"Lo que el hombre hace no puede hacerlo la naturaleza, si bien el hombre, para hacerlo, se vale de todas las leyes de la naturaleza. Lo que preside la creación, el deseo de hacerlo, no existe en toda la naturaleza" (Louis Kahn).



Simetría en las formas naturales. "The geometry of art and life" Matila Ghyka.

Las arquitecturas son creaciones de las que sólo el hombre es capaz, del mismo modo que creación humana es la geometría; pero se trata de dos cosas distintas, aunque haya muchas relaciones recíprocas entre ellas. La Geometría y la Arquitectura son creaciones distintas. La Geometría, que es matemáticas, se ocupa en efecto del espacio abstracto, mientras que la Arquitectura, que es técnica y arte, se ocupa del espacio concreto, del espacio en relación al hombre, a su presencia como observador, a su dimensión como beneficiario de ella.

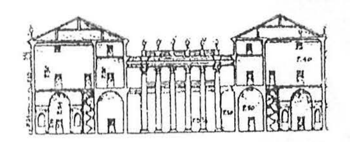
   

4 *Simetría y Arquitectura.*

"La Belleza está estrechamente ligada con la simetría" (Weyl).

Las primeras concepciones sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza. Vitruvio la define como "el vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto a la figura global de la obra". Esta concepción influyó notablemente en el Renacimiento: Durero, Miguel Angel, Piero de la Francesca, Paccioli, Leonardo da Vinci,...contribuyeron al estudio de la simetría sin desligarla del proporcionado de la obra.

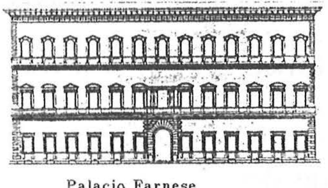
La referencia de Palladio:


Palacio Iseppo Porto, 1552, Palladio.

> "Entiendo que los edificios deben parecer un entero y bien definido cuerpo en el que un miembro convenga al otro y todos los miembros sean necesarios a aquel que se quiere hacer"

sintetiza perfectamente esta vinculación arquitectónica de simetría y proporción en su aspecto global. Esta búsqueda constante del canon y el orden se reflejó no sólo en los diseños de plantas y fachadas sino en todos los elementos integrantes del edificio: frisos, columnatas, mosaicos,...

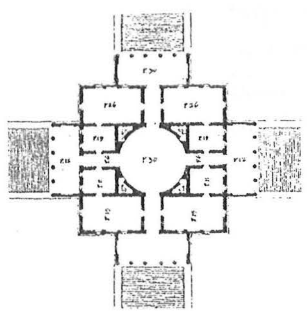
Sigue Palladio:


Palacio Farnese

> "y se debe advertir que las estancias de la parte derecha respondan y sean iguales a las de la izquierda a fin de que la fábrica sea así en una parte como en la otra."[6]

En Viollet le Duc encontramos una nueva conceptualización:

> "Simetría significa hoy, en el lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta, a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha"[7].


Villa Capra,1552, Palladio

En el fondo, esta definición desmarca la teoría de la proporción de la teoría de la simetría, reduciendo ésta a su aspecto euclídeo puramente geométrico. En este sentido, la TEORIA DE LA SIMETRIA es una parte de la geometría que operando sobre el espacio euclídeo engloba como transformaciones a todas las isometrías, siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías de una figura que la dejan invariante.

Pasemos a estudiar algunos ejemplos de Geometría Euclídea y Geometría Equiforme de acuerdo con la definición dada por Klein.

[6] *I quattro libri dell'architettura*
[7] *Dictionnaire d' Architecture*

4.1 *Geometría euclídea.*

Atendiendo a la definición de Geometría de Klein, tomamos como conjunto de puntos el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ y como conjunto de transformaciones las isometrías de $\mathbb{R}^2$, transformaciones afines que se caracterizan por conservar la distancia, es decir, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una *isometría* si y sólo si

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q)$$

para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$, siendo d la distancia euclídea: $d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$.

$(\mathbb{R}^2, ISO(\mathbb{R}^2))$ es un ejemplo de Geometría Euclídea.

Pasemos a hacer un estudio de estas transformaciones de $\mathbb{R}^2$, recordando previamente algunos conceptos:

- *Producto escalar.*

  En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$ se considera una base B ortonormal respecto de la cual los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ de $\mathbb{R}^2$, tienen de coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) respectivamente. El producto escalar de los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ se define de la siguiente manera:

  $$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum x_i y_i,$$

  para $i = 1, 2$.

  A partir del producto escalar podemos definir la norma euclídea como:

- *Norma euclídea de un vector:*

  $$\|\vec{x}\| = +\sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >}$$

- Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se dice *ortogonal* si conserva el producto escalar definido en $\mathbb{R}^2$.

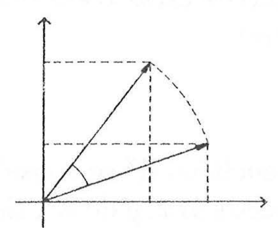
Por ser f una aplicación lineal y ortogonal conserva las normas, las distancias y los ángulos y transforma bases ortogonales en bases ortogonales.

El conjunto $GO(\mathbb{R}^2) = \{f / \ f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal y ortogonal$\}$, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado *grupo ortogonal de* $\mathbb{R}^2$.

Las aplicaciones ortogonales son muy fáciles de determinar pues se caracterizan porque la matriz que las representa en una base ortonormal tiene la particularidad de que su inversa coincide con su traspuesta. Las matrices de las transformaciones ortogonales se denominan *matrices ortogonales.* El grupo $GO(\mathbb{R}^2)$ se identifica con el grupo de las matrices ortogonales cuadradas de orden dos.

Así, si A es la matriz asociada al endomorfismo ortogonal f respecto a una base B ortonormal, como $A^t = A^{-1}$, resulta que $|A| = 1$ ó $|A| = -1$. Esto nos permite clasificar las transformaciones ortogonales en directas o indirectas.

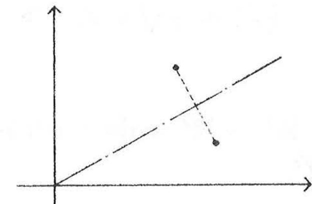
1. Si $|A| = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y f representa un giro de amplitud α, y centro el origen de coordenadas.



La expresión matricial de f es:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Si $|A| = -1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ y f representa un simetría axial con eje la recta $y = tg(\frac{\alpha}{2})x$, que pasa por el origen y forma un ángulo de $\frac{\alpha}{2}$ respecto del eje OX. Si $\vec{u}$ es un vector unitario no nulo, en el eje de simetría y elegimos $\vec{v}$ unitario y ortogonal a $\vec{u}$, la matriz de la simetría axial respecto de esa base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ será $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



En este caso la expresión matricial de la simetría es

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Estos resultados se pueden resumir en el siguiente

Teorema de clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$.

Las únicas transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ son los giros alrededor del origen y las simetrías axiales con ejes por el origen.

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

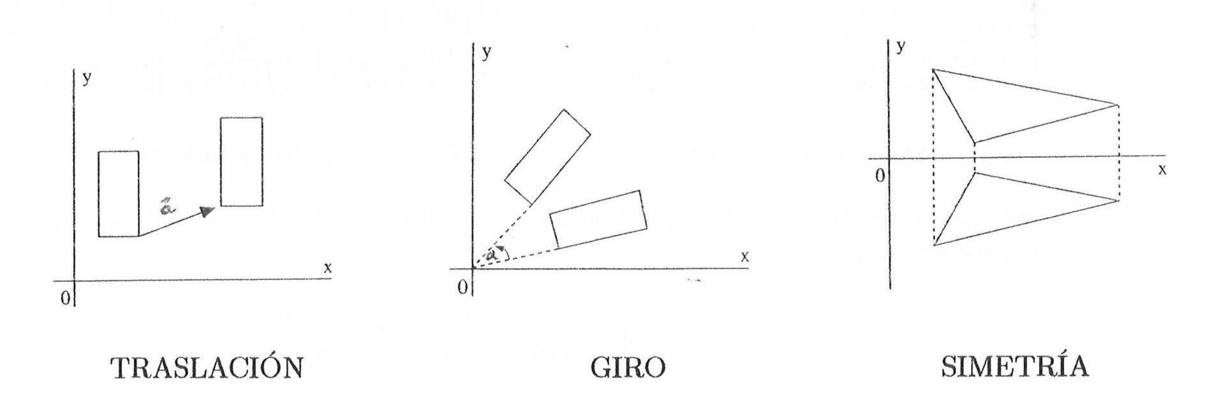
Estamos ahora en disposición de abordar el estudio de las isometrías en el plano. Definimos anteriormente una *isometría* como una aplicación que conserva la distancia.

- Una *Traslación de vector* $\vec{a}$ es una aplicación $T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_{\vec{a}}(X) = X + \vec{a}$, siendo $\vec{a} = (m, n)$ un vector de $\mathbb{R}^2$ no nulo.

  Esta aplicación conserva las distancias, es por tanto una isometría.

Un giro de amplitud α alrededor de un punto C también resulta ser una isometría.

Otra isometría será la simetría respecto de una recta.



TRASLACIÓN GIRO SIMETRÍA

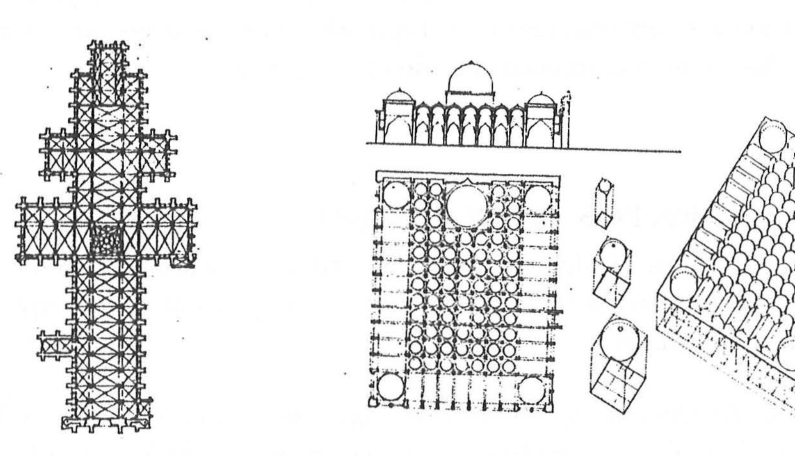
Estos tres movimientos o isometrías se pueden expresar matricialmente respecto de una referencia $\mathfrak{R}$ ortonormal:

La expresión matricial de una traslación T es:

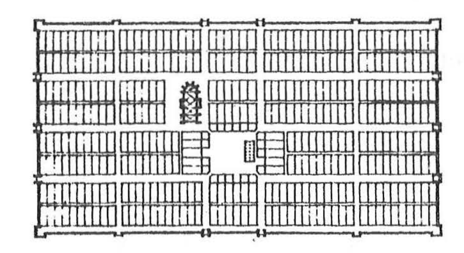
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

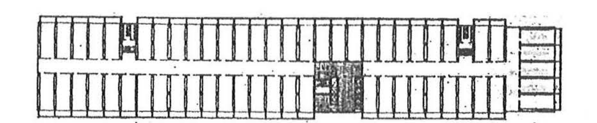
siendo (x, y) las coordenadas del punto X en una referencia $\mathfrak{R}$ de $\mathbb{R}^2$.

A continuación observamos diversos usos de la traslación en obras arquitectónicas:



Catedral de Salisbury,1220 Masjid, India, 1367.





Montpazier, Pueblo francés,1284. Le Corbusier, planta baja tipo,1946

Los giros de amplitud α que tengan su centro en el origen cumplirán la siguiente ecuación:

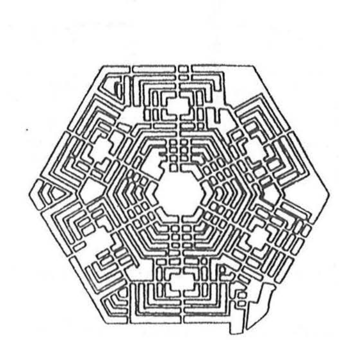
$$G_{O,\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en este caso el determinante de la matriz es igual a 1 y decimos que la isometría es directa, no cambia la orientación del objeto después de aplicar la isometría. Como vemos, la expresión coincide con la transformación ortogonal directa.

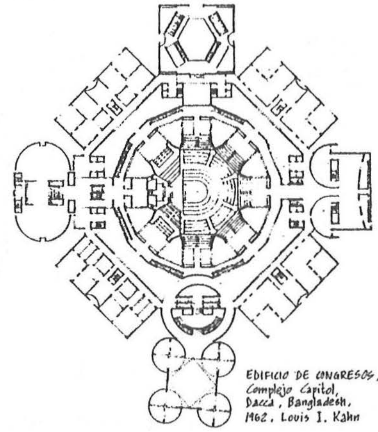
Si el centro del giro no es el origen de la referencia, sino otro punto C, la expresión matricial de $G_{C,\alpha}$ es:

$$G_{C,\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

y podríamos interpretar $G_{C,\alpha}$ como una composición de un giro de ángulo α y centro O con una traslación de vector $\vec{a}$.



Ciudad de Granmichele



Palacio de Congresos, Blangadesh, 1962, L.Kahn

De forma análoga, la simetría respecto de una recta que pase por el origen de coordenadas se expresa matricialmente como sigue:

$$S_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

siendo $y = tg(\frac{\alpha}{2})x$ la ecuación de la recta.

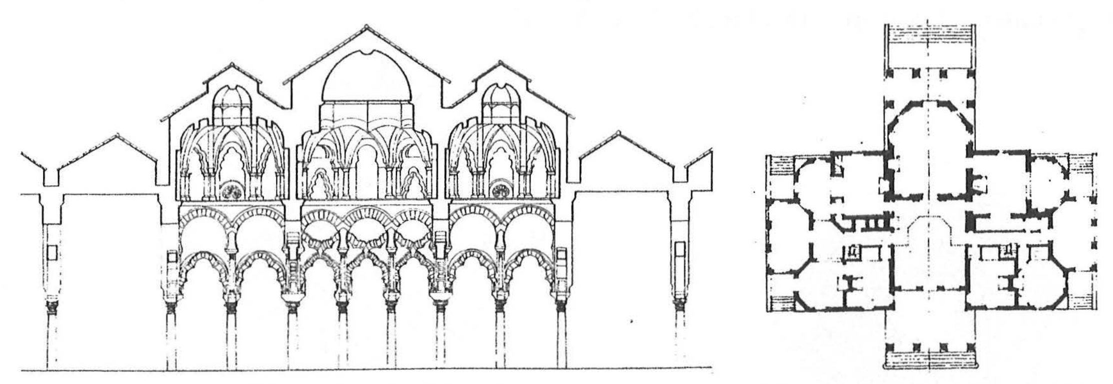
Como vemos, volvemos a encontrar la expresión de la transformación ortogonal que estudiamos anteriormente. En este caso, el determinante de la matriz es -1, por ello resulta que es un movimiento indirecto (las figuras cambian de orientación después de aplicarles el movimiento)

Si la recta no pasa por el origen de coordenadas, su expresión matricial es:

$$S_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

que se puede interpretar como la composición de S_0 con la traslación de vector $\vec{a}$.

Observemos la simetría en los siguientes edificios:



Mezquita de Córdoba Monticello, Virginia, 1800.

Podemos resumir la descripción de las isometrías en el plano con el siguiente teorema:

"Toda isometría es una transformación ortogonal o bien una traslación compuesta con una transformación ortogonal"

Por consiguiente

Descripción de los movimientos en el plano.

Todo movimiento en un plano es o bien la identidad o una traslación o una rotación (movimientos *directos,* que no cambian la orientación del objeto después de aplicarle el movimiento), o bien una simetría o una simetría deslizante (movimientos *indirectos,* que cambian la orientación).

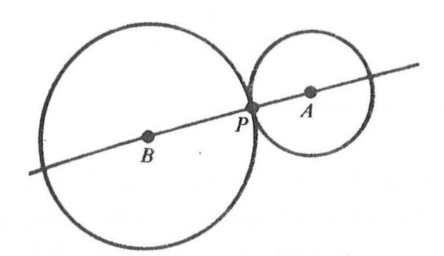
Estos movimientos tienen estructura de Grupo con la composición de aplicaciones, por lo tanto existe el movimiento inverso para cualquier movimiento que se realice en el plano. Si efectuamos un giro $G_{C,\alpha}$, necesitamos otro giro $G_{C,-\alpha}$ para obtener la identidad. Para una simetría S_r bastaría aplicar otra vez el mismo movimiento S_r para obtener la identidad. Por último, una traslación $T_{\vec{a}}$ tiene como movimiento inverso $T_{-\vec{a}}$.

$$(G_{C,-\alpha} \text{ o } G_{C,\alpha})(P) = P$$
$$(S_r \text{ o } S_r)(P) = P$$
$$(T_{-\vec{a}} \text{ o } T_{\vec{a}})(P) = P$$

En el estudio de las isometrías es interesante considerar un tipo especial de puntos, *los puntos fijos.* Un punto P es un punto fijo de una isometría F si $F(P) = P$. En los movimientos descritos anteriormente, los puntos fijos del giro se reducen al centro. En la simetría son fijos los puntos del eje, y la traslación no deja fijo ningún punto. Un resultado muy interesante que nos presenta E. Hernández en "Álgebra y Geometría" para identificar las isometrías en el plano, es el siguiente:

"Si un movimiento en el plano tiene más de un punto fijo, debe ser la identidad (si no cambia la orientación) o una simetría con respecto a una recta que pasa por los puntos fijos (si cambia la orientación)".

Podemos probar que si T es un movimiento con dos puntos fijos, A y B distintos, entonces todos los puntos de la recta AB son puntos fijos:



Sean A y B tales que $T(A) = A$ y $T(B) = B$. Tomo un punto P entre A y B. ¿Dónde puede estar $T(P)$? Como T conserva las distancias, $T(P)$ debe pertenecer a la circunferencia de centro A y radio la distancia desde A hasta P, y también debe pertenecer a la circunferencia de centro B y radio la distancia desde B a P. Luego $T(P)$ debe ser el mismo P.

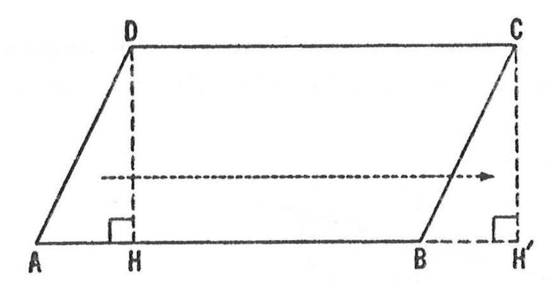
Clasificación de los movimientos en el plano por sus puntos fijos.

- Todos los puntos fijos→ Identidad.
- Un único punto fijo → Giro en torno a ese punto.
- Recta de puntos fijos → Simetría respecto a esa recta.
- Ningún punto fijo → Traslación o Simetría deslizante (simetría axial seguida de traslación paralela al eje).

4.2 *Actividades.*

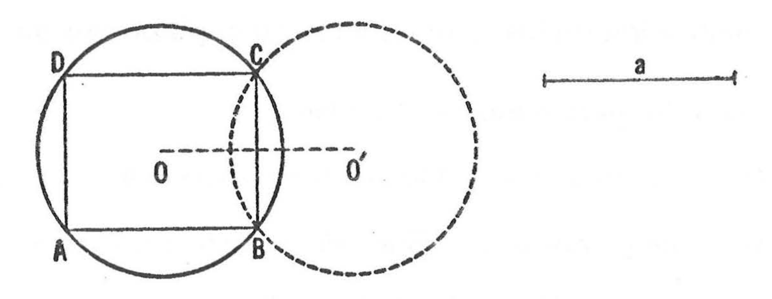
TRASLACIONES

El hecho de que la traslación conserve la forma y el tamaño de cualquier figura nos permite demostrar resultados sobre áreas.



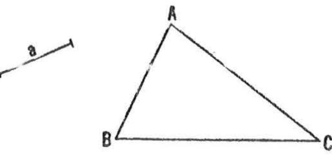
Así, al deducir la fórmula para el área de un paralelogramo $ABCD$ con ángulo agudo en A, podemos recortar el triángulo rectángulo AHD y lo pegamos nuevamente después de trasladarlo a la posición $BH'C$, obteniendo así el rectángulo $HH'CD$.

Otro problema es el de inscribir, en una circunferencia dada, un rectángulo de lados opuestos iguales y paralelos a un segmento a. Se puede resolver trasladando la circunferencia (su centro O) según el vector $\vec{a}$. Con el nuevo centro O' y el mismo radio se traza otra circunferencia que cortará a la anterior en los puntos B, C. Estos son los dos vértices del rectángulo deseado $ABCD$, cuyos lados AB y DC son iguales y paralelos al segmento a.



Otra variante de este problema es inscribir un segmento igual y paralelo a un segmento dado a, en un triángulo ABC.

Podemos continuar manejando traslaciones: Tomamos un triángulo equilátero ABC y ensayamos algunos de los infinitos modelos que podemos obtener aplicándole todos los vectores del tipo: $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, siendo λ y μ, números enteros.



GIROS

Todo el plano gira un ángulo dado en torno a un punto. Así, el tamaño y la forma de las figuras permanecen invariantes, pero todos sus puntos se mueven a lo largo de arcos de circunferencias concéntricas. El centro es el único punto que permanece fijo.

Como aplicación del giro consideremos un triángulo ABC. Formamos los triángulos equiláteros BPC, CQA, ARB, construidos exteriormente sobre los tres lados. Al dibujar las rectas BQ y CR, que se cortan en F, observamos

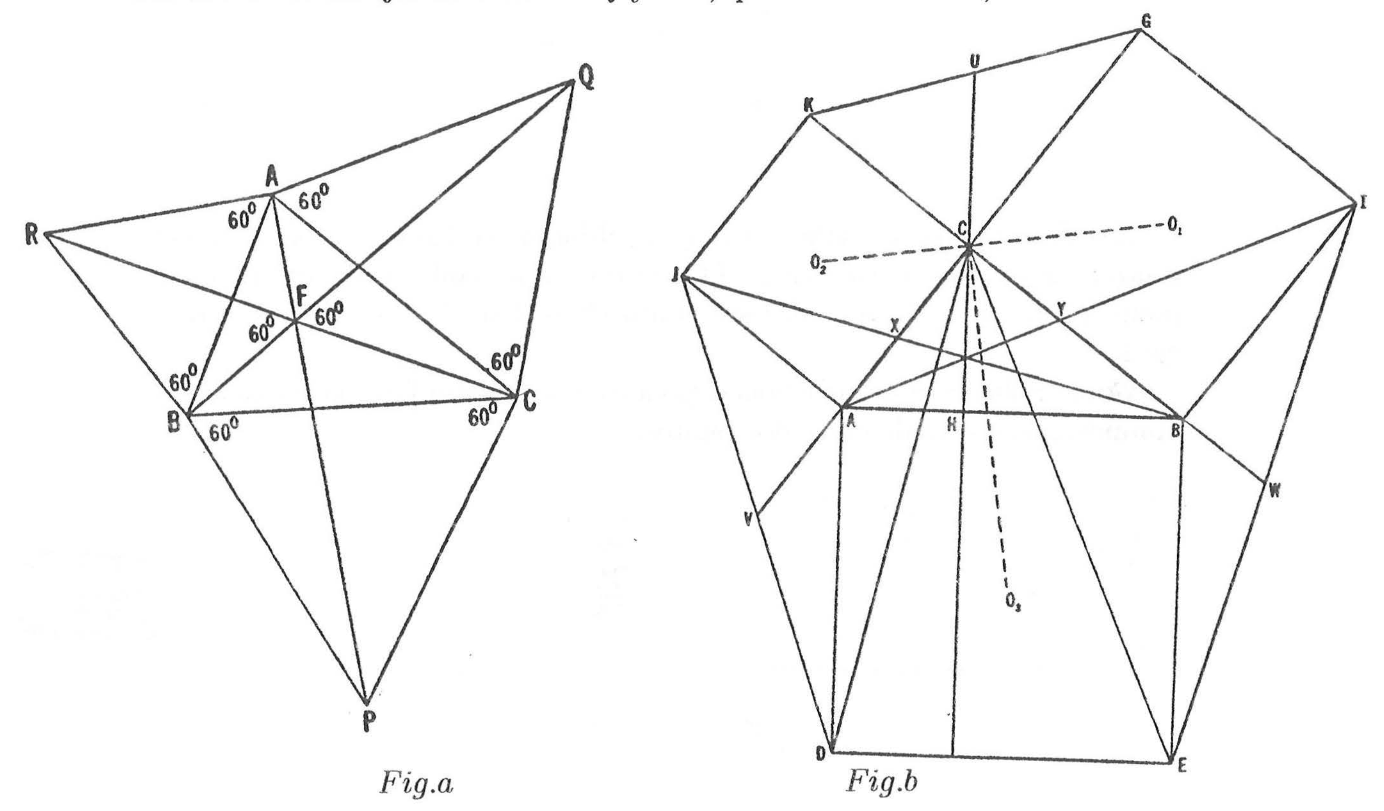


Fig.a *Fig.b*

que un giro de 60° de centro A transforma el triángulo ARC en el triángulo ABQ. Luego el ángulo $RFB = 60°$ y $RC = BQ$. Igualmente $PA = CR$. Luego $AP = BQ = CR$.

Al punto F se le llama *Punto de Fermat* del triángulo ABC.

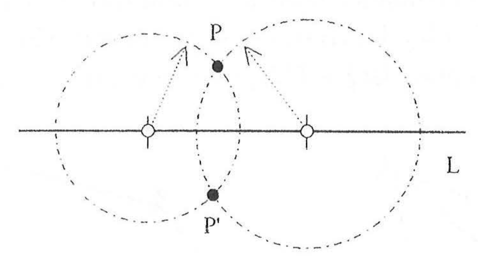
Se verifica que las circunferencias circunscritas de los tres triángulos BPC, CQA, ARB, pasan por el punto F.(*Fig.a*)

Podemos investigar la situación análoga: Si construimos cuadrados externamente sobre los lados de un paralelogramo, ¿qué figura formarán los centros de esos cuadrados?(*Fig.b*)

REFLEXIONES

Las simetrías sobre una recta se llaman también reflexiones. Cada punto del eje es invariante.

Para construir el punto simétrico de un punto P respecto de una recta dada, podemos utilizar el siguiente procedimiento usando "la regla y el compás".



Sea L el eje de simetría. Si $P \notin L$, dibujamos dos circunferencias con centros en L que se corten en P. Observamos que también se cortan en otro punto P' al otro lado del eje. Este punto P' es el simétrico de P respecto al eje L.

Como aplicación de reflexiones, podemos resolver el famoso problema de minimizar el recorrido entre dos puntos.

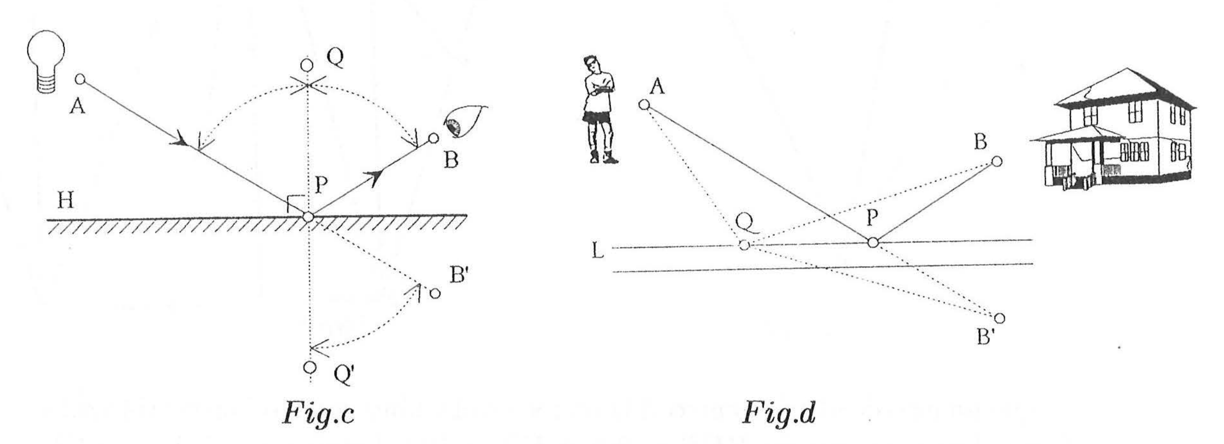


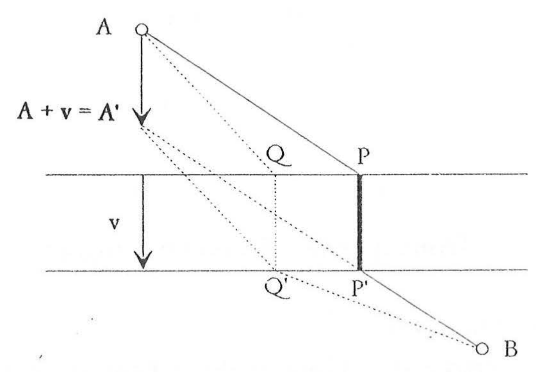
Fig.c *Fig.d*

Un rayo de luz que parte desde un punto A a un espejo y después a otro punto B, lo hace a lo largo de un camino que minimiza el tiempo de recorrido. En un medio homogéneo ese tiempo es proporcional a la distancia recorrida. Si el rayo incide en el espejo con un ángulo α, se refleja en él formando el mismo ángulo; así pues es el mismo camino que para obtener la longitud mínima.

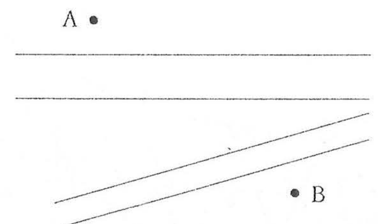
El segmento AB' es la longitud mínima. Como $PB = PB'$, el camino más corto para ir de A a B, en el mismo lado del eje, es la quebrada $APB.(Fig.c)$

La misma situación se presenta si queremos encontrar el camino más corto que une dos puntos con la condición de pasar por algún punto situado en un río, estando los dos puntos anteriores al mismo lado de él.($Fig.d$)

El problema de dónde construir un puente que conecte dos ciudades por el camino más corto se puede resolver utilizando traslaciones y reflexiones: Sean A y B dos lugares a ambos lados del río de anchura v.



Avanzando en el problema, podemos investigar cuál será el camino más corto que une dos ciudades separadas por un número arbitrario de ríos.



Por medio de reflexiones podemos tratar de probar también que dado un triángulo con base y área fijados, el perímetro es mínimo si el triángulo es isósceles.

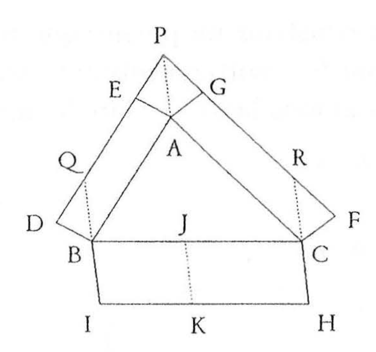
ACTIVIDADES PROPUESTAS.

1. Si L es una recta paralela al segmento $\overline{AB}$ y $C, C' \in L$, entonces los triángulos ABC y $A\,B\,C'$ tienen la misma área.

2. Teorema generalizado de Pitágoras.

Sea un triángulo ABC . Construimos los paralelogramos $ABDE, ACFG$, sobre los dos lados AB y AC del triángulo. Sea P el punto de corte de las rectas DE y FG. Construimos otro paralelogramo $BCHI$ de manera que los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{BI}$ sean iguales. Entonces se verifica que

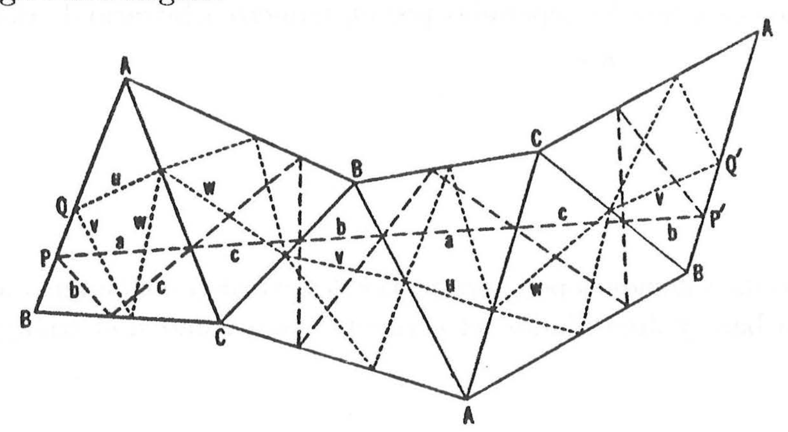
$$área(ABDE) + área(ACFG) = área(BCHI)$$



Teorema generalizado de Pitágoras

3. Problema de Fangano.

Consiste en encontrar el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo.



Para resolverlo, comenzamos con un triángulo acutángulo ABC en el que hemos inscrito dos triángulos: el órtico (sus vértices están en los pies de las alturas de ABC), y otro cualquiera. Reflejando ABC sobre sus lados AC, CB, BA, AC, CB sucesivamente, observamos que el lado AB final es el trasladado del AB inicial. Teniendo en cuenta propiedades del triángulo órtico, comparando PP' con la quebrada QQ', se concluye que el triángulo de perímetro mínimo inscrito en ABC es su triángulo órtico.

4.3 *Geometría equiforme.*

Para obtener un ejemplo de geometría equiforme vamos a tomar como conjunto de puntos el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ y como conjunto de transformaciones las semejanzas en $\mathbb{R}^2$.

- Dado un número real $K \neq 0$, se define la *semejanza de razón* K, como la aplicación $S_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,tal que

  $$d(S_k(P), S_k(Q)) = |K|\ d(P, Q)$$

  siendo P y $Q \in \mathbb{R}^2$. Es decir, la distancia entre los transformados de los puntos es K veces la distancia entre los puntos iniciales.

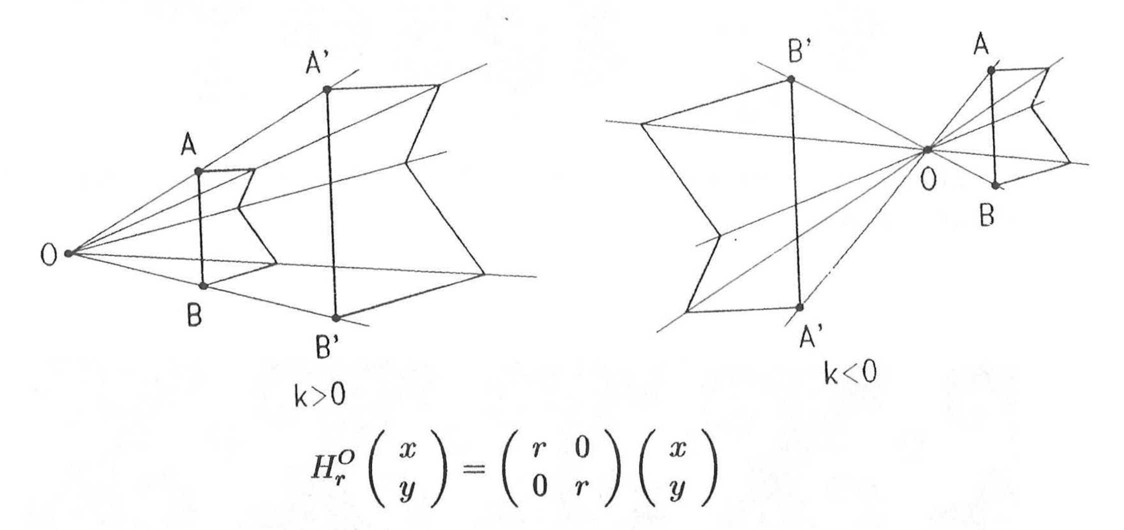
  Las isometrías son evidentemente semejanzas de razón $|K| = 1$.

- En $\mathbb{R}^2$ se definen las *homotecias* de centro C y razón $r \neq 0, 1, -1$ como aplicaciones afines $H_r^C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que

  $$H_r^C(P) = C + r\,\overrightarrow{CP}$$

  siendo C y P puntos de $\mathbb{R}^2$.

  Si la homotecia está centrada en el origen, su expresión respecto a una referencia ortonormal $\mathbb{R}$ es



$$H_r^O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En otro caso, la expresión matricial de la homotecia es:

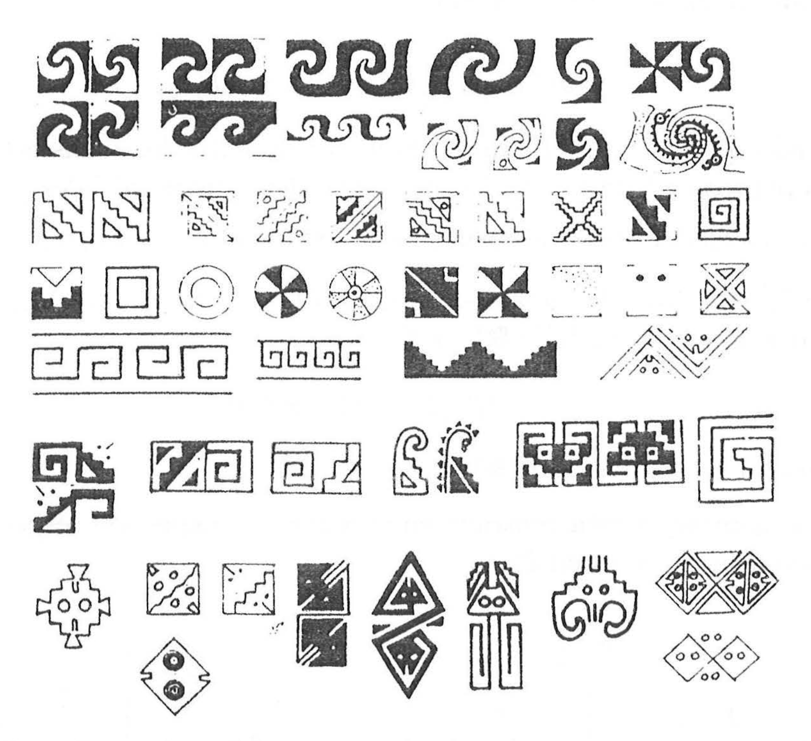
$$H_r^C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-r)c_1 \\ (1-r)c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

siendo (c_1,c_2) coordenadas del punto C en $\mathfrak{R}$.

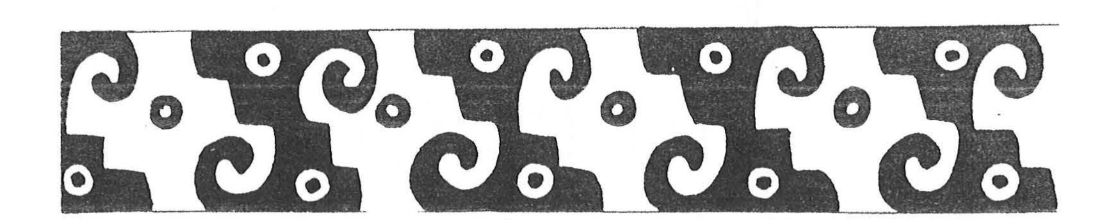
Teorema de clasificación de semejanzas.

Toda semejanza es la composición de una transformación ortogonal con una homotecia y con una traslación.

La semejanza recibe el nombre de *directa o indirecta* según que la transformación ortogonal sea directa o indirecta.



Motivos decorativos del arte precolombino en los que podemos observar las distintas semejanzas.

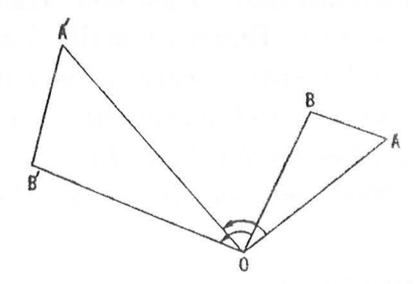


4.4 *Actividades.*

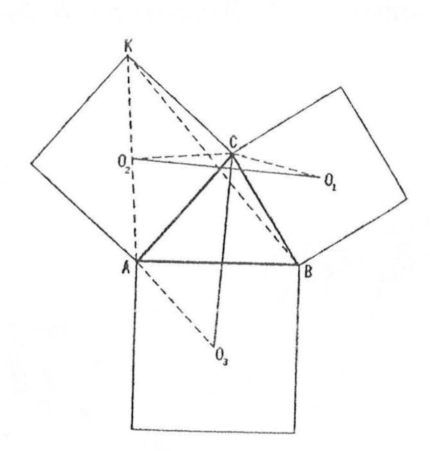
1. SEMEJANZA EN ESPIRAL

Si a una figura le aplicamos primero una homotecia de razón r, con $|r| > 1$, y luego una traslación, la figura inicial y la final tienen paralelas sus líneas correspondientes, de forma que la composición de una homotecia y una traslación es otra homotecia. Si efectuamos, una seguida de otra, dos homotecias, el resultado es otra homotecia. Sin embargo, si primero efectuamos una homotecia y luego una rotación, las rectas correspondientes ya no son paralelas.

A la composición de una homotecia y un giro del mismo centro se le llama *semejanza en espiral*. Se denota por su centro O, su razón r y el ángulo de rotación α: $O(r, \alpha)$



Un ejemplo de utilización de la semejanza en espiral es el resultado siguiente: Si se construyen externamente sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, cuadrados de centros O_1, O_2, O_3, entonces los segmentos O_1O_2 y CO_3 son iguales y perpendiculares.



La semejanza en espiral $A(\sqrt{2}, 45^o)$ transformará el triángulo CAO_3 en el triángulo KAB, y la semejanza $C(\sqrt{2}, -45^o)$ transformará el O_1CO_2 en el triángulo BCK. Como BK es común a ambas transformaciones y la razón es la misma, los dos lados O_3C y O_1O_2 deben ser iguales. Además como el ángulo entre los transformados de O_3C y O_1O_2 es cero por semejanzas que conllevan rotaciones de ángulos 45° y -45° , estas rectas tienen que haber sido originariamente perpendiculares.

Nos preguntamos ahora, ¿y si los centros son distintos? Se puede probar que la respuesta sigue siendo la misma: una semejanza en espiral. De esto se deduce que: "*Dos figuras cualesquiera directamente semejantes están relacionadas por una traslación o por una semejanza en espiral*"

Luego, toda semejanza que no sea una traslación, tiene un punto invariante y ese punto es único. Entonces, si dibujamos sobre papel dos plantas del mismo edificio en diferentes escalas y las superponemos, sólo hay un lugar que esté representado por el mismo punto en ambos planos. Así llegamos geométricamente al *Teorema del Punto fijo.*

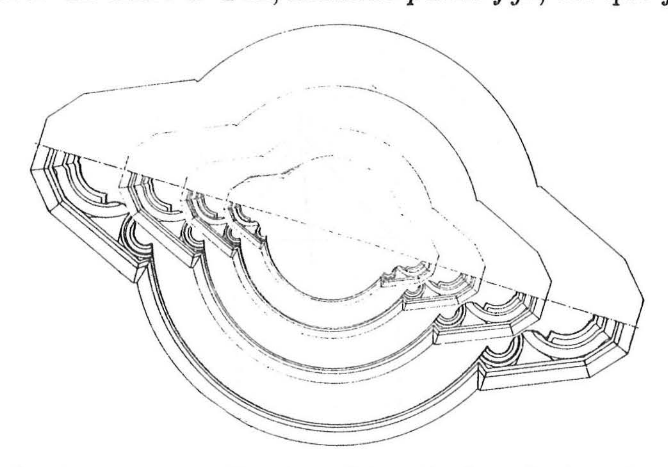
Este teorema, famoso por sus aplicaciones fue demostrado por Brouwer en 1906.

Teorema del punto fijo.

Sea una función continua $f : Q \rightarrow Q$, siendo Q un cuadrado cerrado. Entonces existe al menos un punto $\varepsilon \in Q$ tal que $f(\varepsilon) = \varepsilon$.

La formulación del teorema para espacios métricos es la siguiente

Si M es un espacio métrico completo y $f : M \longrightarrow M$ es una aplicación *contractiva de módulo* k (esto es, $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$, para $0 < k < 1$), entonces existe un único $x \in X$, llamado *punto fijo*, tal que $f(x) = x$.



Este resultado nos garantiza la existencia de solución de una ecuación sin construirla. Por tanto, los problemas de sistemas de ecuaciones se transforman en problemas de puntos fijos.

2. FRACTALES

Sea T_0 el triángulo equilátero de lado unidad. Consideremos los triángulos de lado $\frac{1}{3}$ que se obtienen al aplicarle las siguientes semejanzas:

$$S_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

homotecia de centro el origen y razón $\frac{1}{3}$.

$$S_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

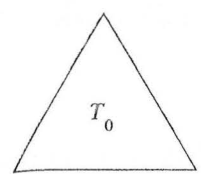
homotecia de centro el origen y razón $\frac{1}{3}$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3}, 0)$.

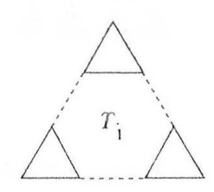
$$S_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \cos 60^o \\ sen 60^o \end{pmatrix}$$

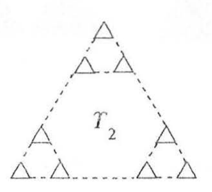
homotecia de centro el origen y razón $\frac{1}{3}$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3}\cos 60^o, \frac{2}{3}sen60^o)$.

Llamemos T_1al conjunto formado por estos tres triángulos equiláteros resultantes.

Aplicando estas transformaciones al conjunto T_1 obtenemos el conjunto T_2.





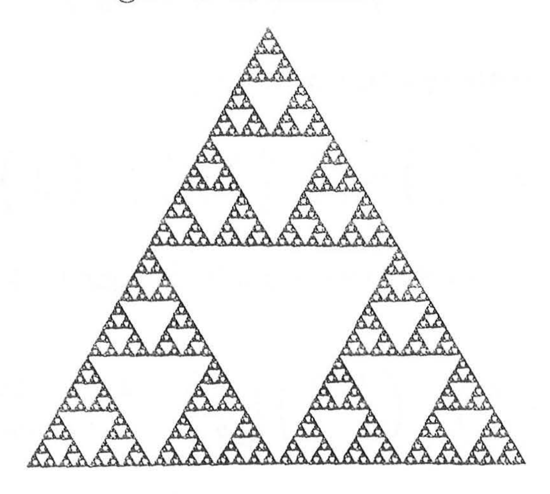


Con este proceso estamos creando un conjunto autosemejante, porque se cumple que: $T_2 = S_1(T_2) \cup S_2(T_2) \cup S_3(T_2)$. Cualquiera de las partes que componen T_2 es semejante al conjunto total T_2. Para que se de el proceso de autosemejanza las semejanzas deben ser contractivas, o sea de razón positiva menor que uno.

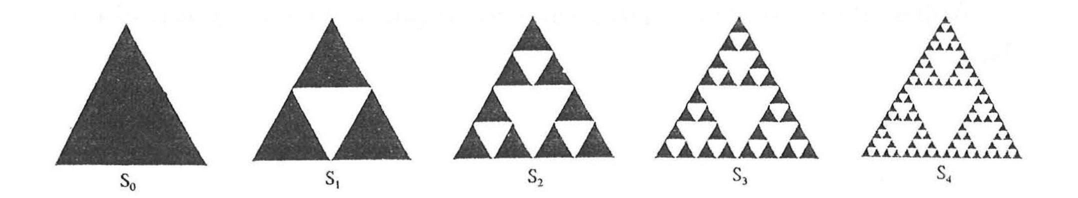
El triángulo de Sierpinski se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico de este tipo.

Este proceso geométrico elemental es muy simple y determina perfectamente la estructura final, pero debido al proceso infinito de repetición tiene una complicación aparente extraordinaria.

Pues bien, este triángulo es un fractal.

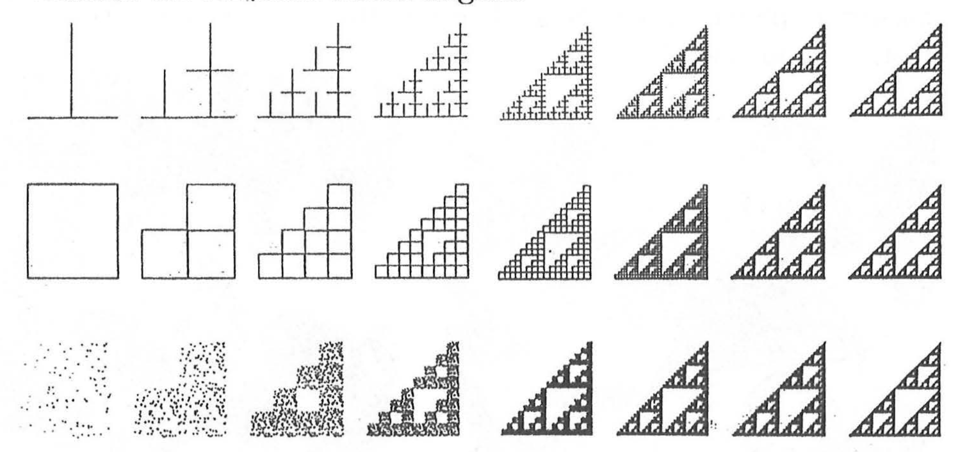


Se puede obtener este triángulo como resultado de construir cuatro triángulos homotéticos a S_0 ,de lado $l_1 = \frac{l_0}{2}$, y quitar el triángulo que se encuentra en el centro.

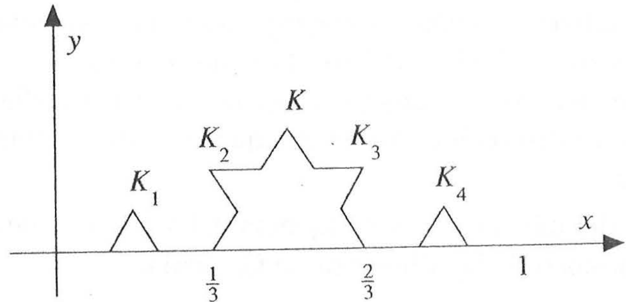


Se propone: Obtener la expresión matricial de esas homotecias, fijando previamente una referencia. Determinar el número de triángulos que forman S_k, el perímetro de cada uno de ellos y la suma de los perímetros de todos los triángulos que componen S_k cuando $k \longrightarrow \infty$. Hallar el área de S_k cuando $k \longrightarrow \infty$.

La siguiente figura muestra que el proceso de obtención de este fractal es independiente del conjunto inicial elegido.

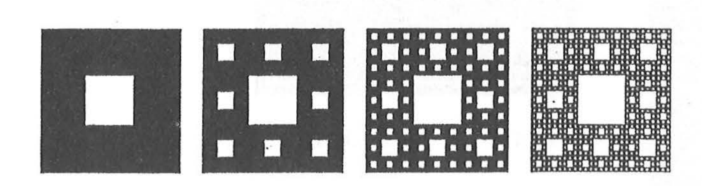


Como actividad complementaria podemos considerar la curva de Koch y determinar las transformaciones que definen la semejanza de la curva final con las figuras que resultan al aplicar el proceso de construcción en el paso $k = 4$.

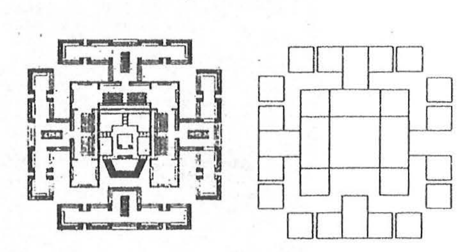


Estas semejanzas resultan ser homotecias compuestas con giros y traslaciones. (Ver "Estructuras fractales y sus aplicaciones", de Miguel de Guzmán y otros, editorial Labor, y en 5.2 *Sistemas de Geometría Dinámica* la generación por ordenador de fractales de distintos tipos).

Añadimos aquí una interpretación de los fractales en la arquitectura.



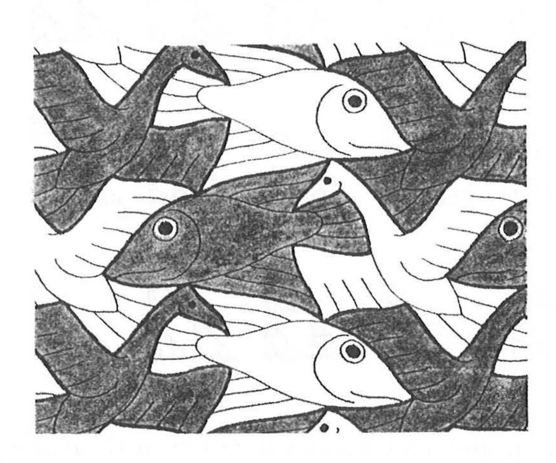
Fractal

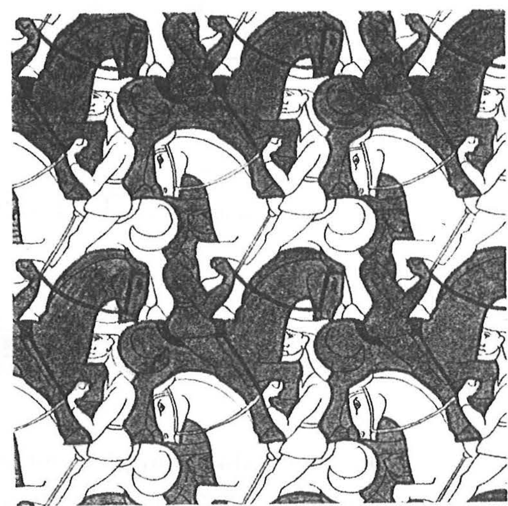


Obras de Louis Kahn

3. PARTICIONES REGULARES DEL PLANO.

Las siguientes figuras de Escher, muestran particiones regulares de una superficie plana. Un análisis de estas ilustraciones nos permite encontrar distintos movimientos



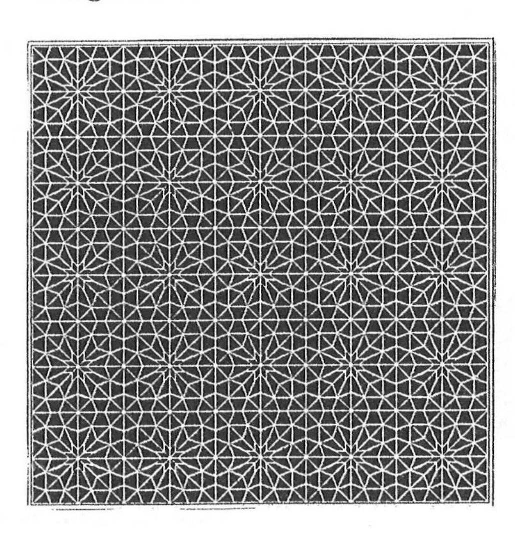


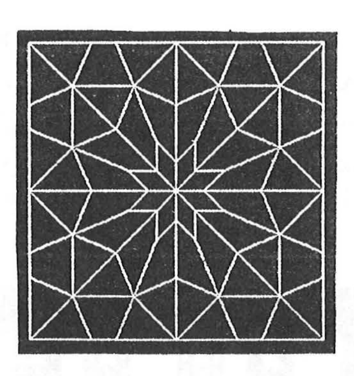
Podemos preguntarnos:

1º) ¿Qué figuras se corresponden por una traslación? Hallar el vector de traslación. Igualmente ¿cuáles se corresponden por rotaciones? Dar el centro y el ángulo, ¿y por reflexiones? Dar el eje de simetría.

2º) Señalar dos de esas figuras y encontrar sus transformadas por giros de amplitud y centro dados. Investigar qué transformaciones nos devuelven figuras iguales.

- Estudiar del mismo modo el esquema del arabesco que se encuentran en el siguiente mosaico de la Alhambra de Granada.





Dominio fundamental

4. TRANSFORMACIONES EQUIFORMES.

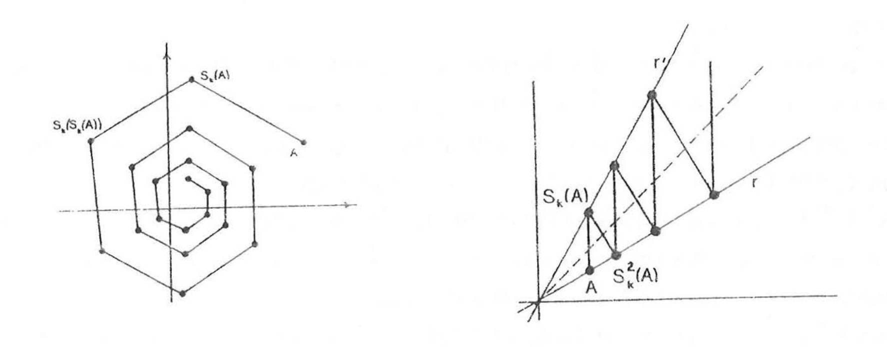
Sea A un punto de $\mathbb{R}^2$, y S_k una semejanza con$|k| \neq 1$. Consideremos la sucesión de puntos del plano:

$$A,\ S_k(A),\ S_k(S_k(A))...\ S_k^n(A)...$$

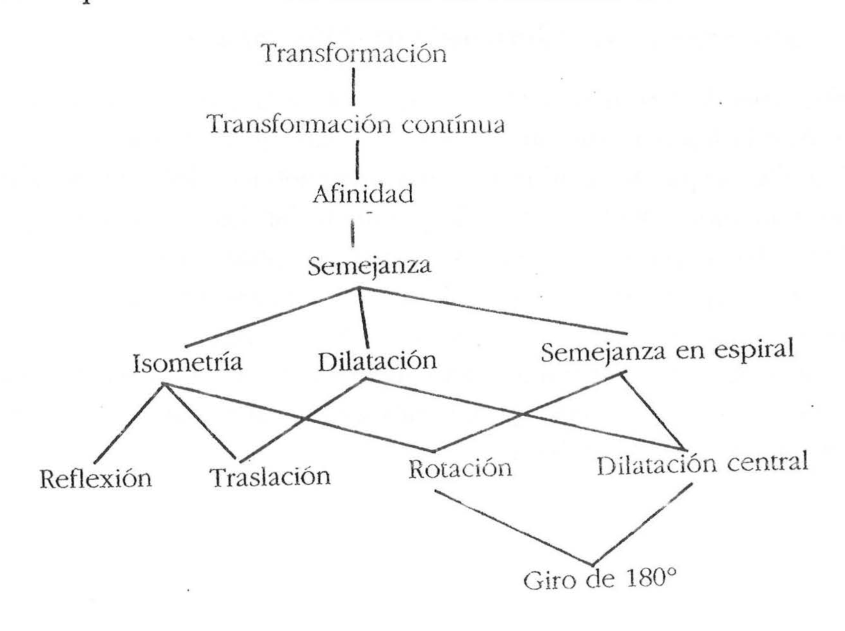
Si $|k| < 1$, la sucesión tiende en distancia a 0 y a ∞, si $|k| > 1$.

Si S_k es directa, los puntos de la sucesión se encuentran sobre una espiral logarítmica con origen en O.

Si S_k es indirecta, los puntos de esa sucesión caen alternativamente sobre dos rectas r y r' que pasan por el origen y son simétricas respecto del eje de simetría de S_k.



Como conclusión expresamos aquí *la GENEALOGÍA DE LAS TRANSFORMACIONES* que presentan Coxeter y Greitzer en "Retorno a la Geometría". Este esquema resume claramente las relaciones entre ellas.



5 *Construcciones geométricas con ordenador.*

5.1 *Simulación de Movimientos y Semejanzas.*

Utilizaremos el Programa EQUDEMO Y EQU.EXE, ambos construidos por E.Roanes Macías y E.Roanes Lozano en "Nuevas tecnologías en Geometría".

El Programa simula el grupo equiforme en $\mathbb{R}^2$. Presenta las siguientes opciones: Traslación, Rotación, Reflexión, y Homotecia. Permite efectuar la composición entre ellas. Es muy útil para comprobar propiedades de las transformaciones geométricas, operar con ellas, observar los resultados,...

En EQUDEMO, programa de demostración ejecutable, presenta el producto de dos reflexiones de ejes secantes y comprueba que su composición es un giro cuyo centro es el punto de intersección de los ejes y amplitud el doble del ángulo que forman.

Efectúa la composición de dos homotecias de razones distintas y se comprueba que es otra homotecia de razón el producto de sus razones.

Una opción interesante es la que denomina "figuras semejantes". Dadas dos figuras, determina la semejanza que convierte una en otra.

El EQU.EXE funciona interactivamente. Nos permite transformar nuestras propias figuras geométricas según las transformaciones previamente elegidas e investigar propiedades de las semejanzas.

En primer lugar conviene utilizar el EQUDEMO para conocer las posibilidades del programa y después cada alumno diseñará su propio trabajo con EQU.EXE. Puede elegir las transformaciones, prever el resultado final, elegir esas transformaciones para obtener una figura determinada...

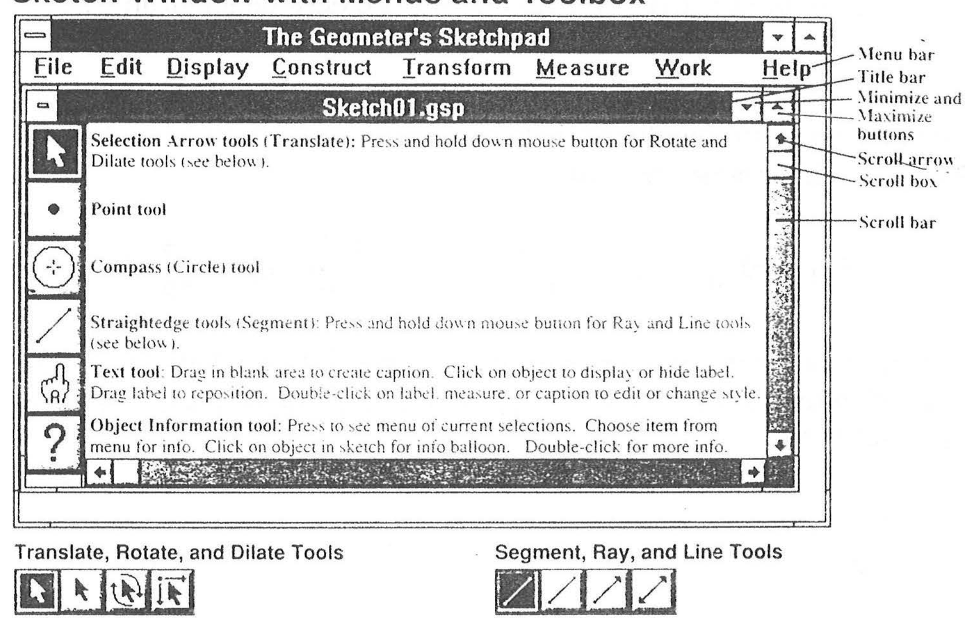
5.2 *Sistemas de Geometría Dinámica.*

Los *Sistemas de Geometría Dinámica* son sistemas computacionales especialmente diseñados para efectuar construcciones geométricas.

Con ellos se puede dibujar un objeto geométrico, deformarlo, almacenarlo, animar con movimiento...Están implementadas las operaciones geométricas usuales: Trazar paralela a una recta por un punto dado, trazar la perpendicular, el segmento de extremos dos puntos dados, la bisectriz de un ángulo, puntos de intersección de rectas y circunferencias...

Se pueden efectuar también transformaciones geométricas: reflexiones, giros, traslaciones, homotecias y su composición. Además proporciona medidas de distancias, ángulos y áreas.

Utilizaremos el GEOMETER SKETCHPAD. Con este programa podemos diseñar nuestros objetos geométricos y efectuar operaciones geométricas.



El directorio SAMPLES contiene simulaciones con animación del Teorema de Pitágoras (Chunpyth), en figuras de varias dimensiones (Hyprcube)...

El ordenador actual con su versatilidad gráfica, su poder de resolución, ampliación, profundidad, colores...permite seguir los procesos iterativos que dan lugar a las estructuras fractales hasta límites del todo insospechados hace unos años. El auge que el estudio de los fractales ha experimentado se debe, en buena parte, a la eficaz introducción del ordenador como herramienta auxiliar en este campo. Los fractales se basan en la repetición, en principio, infinita, de un cierto proceso bien determinado. El ordenador, con su inmensa capacidad de iteración rápida de estos procesos sencillos, es el instrumento ideal para abordar su estudio. Con el programa GEOMETER SKETCHPAD, en el directorio FRACTALS, podemos generar fractales de distintos tipos, con diversos procesos de construcción, y obtener la figura en el paso que queramos del proceso iterativo. Como ejemplo podemos observar:

- El conjunto de Cantor.

  Es un conjunto clásico de conjunto no numerable con medida (longitud) nula.

  Se construye de la manera siguiente: Partimos del intervalo unidad $E_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ de longitud 1.

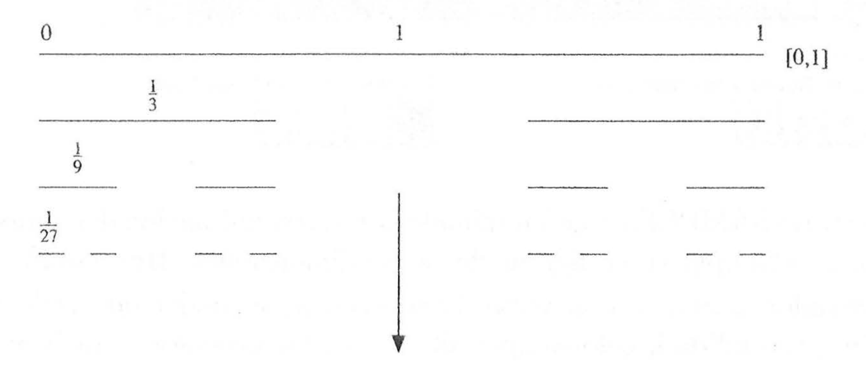
Dividimos ese intervalo en tres partes iguales y consideramos los dos intervalos cerrados de los extremos:

$$E_{11} = [0, \frac{1}{3}] \text{ y } E_{12} = [\frac{2}{3}, 1], \text{cada uno de ellos de longitud } \frac{1}{3}.$$

A su vez, cada uno de estos intervalos se divide en tres intervalos iguales de longitud $\frac{1}{9}$. Prescindimos de los intervalos centrales y consideramos los cuatro intervalos cerrados:

$$E_{21} = [0, \frac{1}{9}] \ , \ E_{22} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \ , \ E_{23} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \ , \ E_{24} = [\frac{8}{9}, 1]$$

Si continuamos indefinidamente, en la etapa k-ésima habremos obtenido 2^k intervalos cerrados E_{kj} , $j = 1, 2, ...2^k$, cada uno de ellos de longitud 3^{-k}.



Para cada $k = 1, 2, ..$ sea $E_k = \cup E_{kj}$, $j = 1, 2, ...2^k$. Pues bien, el conjunto límite de este proceso E, definido como

$$E = \cap E_k \text{ desde } k = 1, 2, ...\infty$$

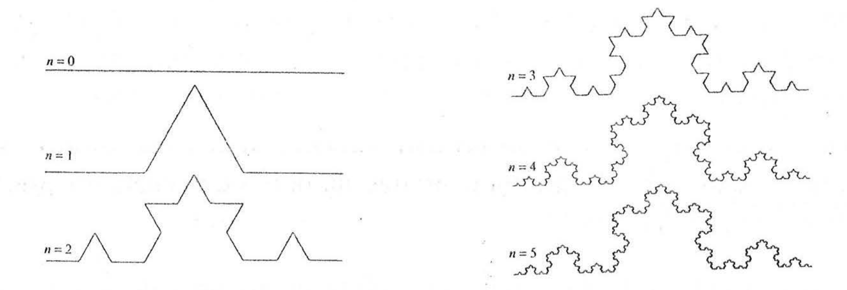
se llama CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR.

- Curva de Koch.

  En 1904 el matemático sueco Helge von Koch construye la curva que hoy lleva su nombre como sigue:

  Parte del segmento unidad $P_0 = [0, 1]$, se divide en tres partes sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con esa parte, formarían un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal P_1 de longitud $\frac{4}{3}$.

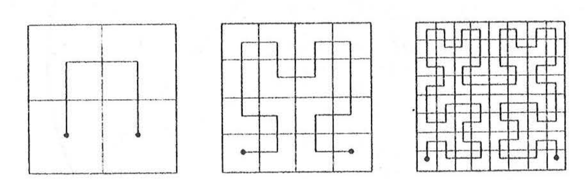
Con cada uno de los cuatro segmentos determinados así, se repite la operación descrita, obteniendo una poligonal P_2 de longitud $\frac{16}{9}$.



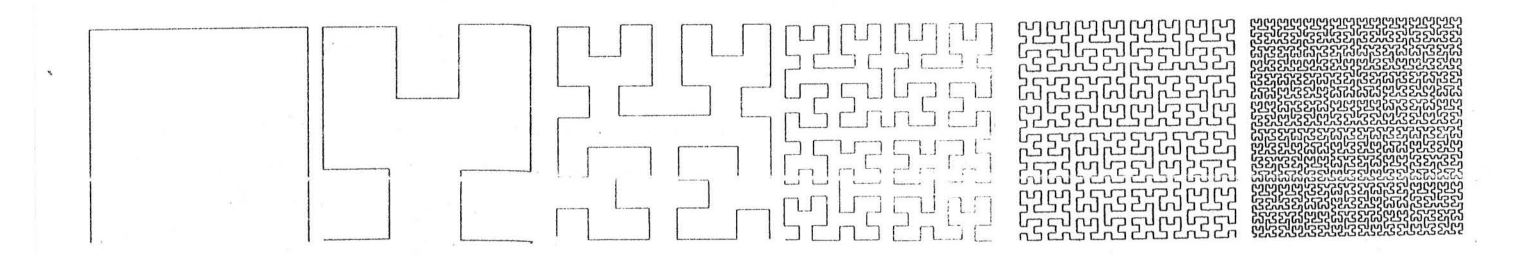
Procediendo indefinidamente de esta manera, se obtiene en cada etapa k una poligonal P_k de longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. La CURVA DE KOCH se define como la curva límite a la que converge la sucesión P_k cuando k tiende a infinito. Es de longitud infinita.

- Curva de Hilbert.

En 1890, Peano construye una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0,1]$x$[0,1]$. Era el primer ejemplo de una curva que "llena el espacio". Más adelante, Hilbert construye otra del mismo tipo del modo siguiente: Dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados iguales y unimos sus centros por segmentos. Cada uno de esos cuadrados se divide de nuevo en cuatro cuadrados y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo y terminando en el inferior derecho.



Se continúa este proceso indefinidamente y la figura que se obtiene es la CURVA DE HILBERT.



5.3 *Construcciones con triángulos.*

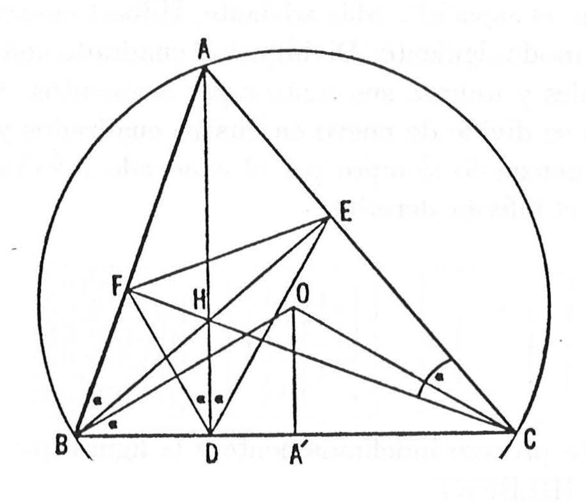
El interés didáctico de estos programas queda patente ya que permiten comprobar experimentalmente propiedades geométricas, descubrirlas y crear nuevos objetos geométricos. Esbozamos aquí varias prácticas que pueden dar idea de la utilidad de las técnicas computacionales en la enseñanza de la Geometría.

- *TRIÁNGULO ÓRTICO.*

El triángulo órtico $A'B'C$ tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo ABC.

Comprobar que: "El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico".

Utilizamos en primer lugar ORTDEMO y ORTOCEN.EXE para construir alturas de un triángulo. Después con GEOMETER SKETCHPAD construimos un triángulo, sus alturas, su triángulo órtico, y animamos la figura observando que la propiedad se sigue verificando.



- *TRIÁNGULO MEDIAL.*

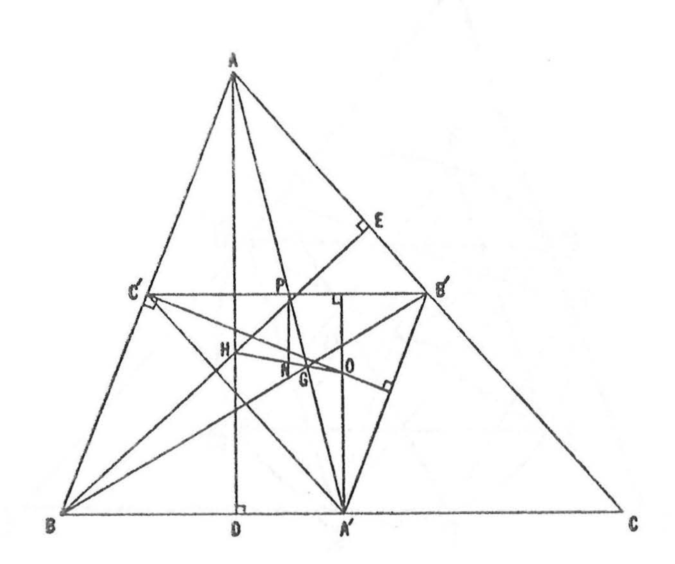
El triángulo medial de un triángulo ABC tiene por vértices los puntos medios de los lados.

Se propone comprobar que:

1. "Un triángulo y su medial tienen el mismo baricentro"

2. "El ortocentro del triángulo medial es el circuncentro del triángulo de partida"

Comenzaremos utilizando BARI.EXE, CIRCDEMO y CIRCUM.EXE que dibujan el baricentro de un triángulo,sus mediatrices y la circunferencia circunscrita. Con el GEOMETER SKETCHPAD construimos un triángulo y esos elementos de interés y comprobamos las relaciones entre ellos. Al modificar cuanto queramos la figura observamos la invariancia de estas relaciones.

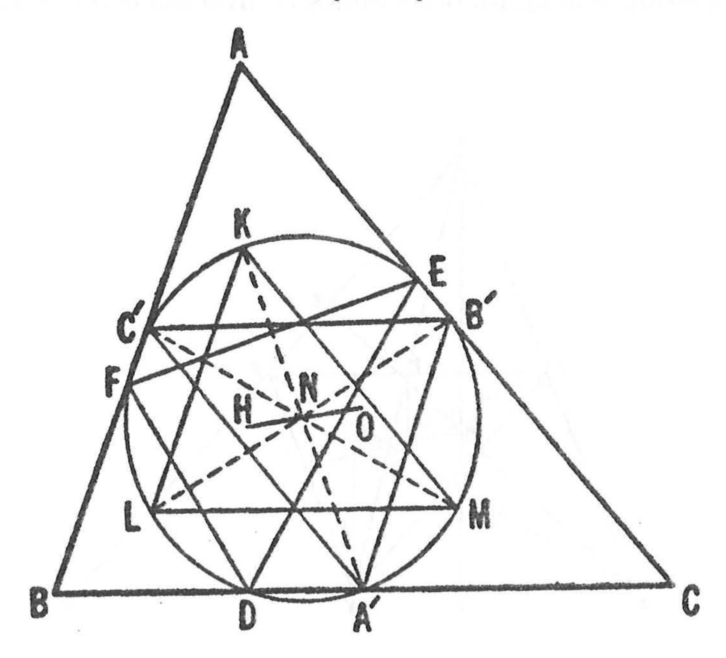


• *CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS.*

Comprobar que para cualquier triángulo ABC, los pies de las tres alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro están en la misma circunferencia. Esta tiene de radio $\frac{1}{2}R$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

El Teorema de Feuerbach afirma que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a las cuatro circunferencias tritangentes.

Después de comprobar estas propiedades podemos utilizar TOTALTRI, en el paquete GEOMETER, que construye sobre un triángulo las medianas, mediatrices, bisectrices, alturas, circunferencias inscrita y circunscrita y la recta de Euler. Se anima todo el conjunto y se mantienen estas relaciones.



Para completar estas prácticas, podemos consultar Coxeter, H.S.M. / Greitzer, S.L. *Retorno a la Geometría,* y estudiar paso a paso las demostraciones geométricas, que sin duda ahora se comprenderán mucho mejor.

6 *BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.*

- Alsina, C. y Trillas, E. *Lecciones de Algebra y Geometría*, Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1984.
- Coxeter, H.S.M. y Greitzer, S.L. *Retorno a la Geometría*, DLS Euler Editores, 1993.
- Guzmán Ozamiz, M. y otros. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor Matemáticas, Barcelona, 1993
- Kline, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- Quaroni, L. *Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura*, Xarait Ediciones, Madrid, 1987.
- Roanes Macías, E. y Roanes Lorenzo, E. *Nuevas tecnologías en Geometría*, Editorial Complutense, Madrid, 1994.

Índice General

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

32.02

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

